

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练 (7) 10.25

班级 _____

姓名 _____

1. 已知函数 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) \cdot \cos x$.

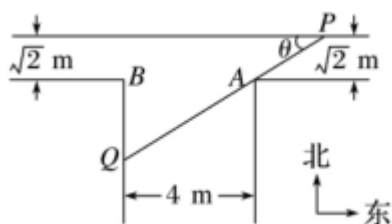
(1) 若 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 求函数 $f(x)$ 的值域 ;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 A 为锐角且 $f(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $b = 2, c = 3$, 求 $\cos(A - B)$ 的值 .

2. 某“T”型水渠南北向宽为 $4m$ ，东西向宽为 $\sqrt{2}m$ ，其俯视图如图所示．假设水渠内的水面始终保持水平位置．

(1) 过点 A 的一条直线与水渠的内壁交于 P 、 Q 两点，且与水渠的一边的夹角为 θ （ θ 为锐角），将线段 PQ 的长度 l 表示为 θ 的函数；

(2) 若从南面漂来一根长度为 $7m$ 的笔直的竹竿（粗细不计），竹竿始终浮于水平面内，且不发生形变，问：这根竹竿能否从拐角处一直漂向东西向的水渠（不会卡住）？试说明理由．

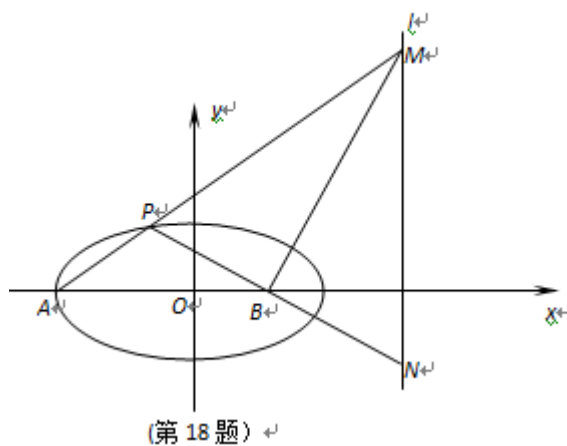


3. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。过椭圆 C 的左顶点 A 作直线交椭圆 C 于另一点 P ，交直线

$l: x = m (m > a)$ 于点 M 。已知点 $B(1, 0)$ ，直线 PB 交 l 于点 N 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

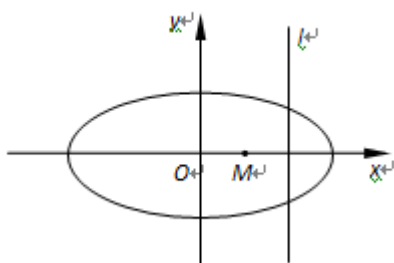
(2) 若 MB 是线段 PN 的垂直平分线，求实数 m 的值。



4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且直线 $l: x=2$ 被椭圆 E 截得的弦长为 2. 与坐标轴不垂直的直线交椭圆 E 于 P, Q 两点, 且 PQ 的中点 R 在直线 l 上. 点 $M(1, 0)$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 求证: $MR \perp PQ$.



江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学 中档大题训练 (7) 答案 10.25

15. 解: (1) $f(x) = (\sin x + \sqrt{3}\cos x)\cos x = \sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x$,

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 得, $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$, 故 $\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \leq 1$,

1、

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right]$. \dots\dots 6 \text{ 分}

(2) 由 $f(A) = \sin(2A + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\sin(2A + \frac{\pi}{3}) = 0$,

又 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{3} < 2A + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$,

所以 $2A + \frac{\pi}{3} = \pi$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$, \dots\dots 8 \text{ 分}

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7$, 得 $a = \sqrt{7}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, \dots\dots 10 \text{ 分}

因为 $b < a$, 所以 $B < A$, 所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, \dots\dots 12 \text{ 分}

所以 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$. \dots\dots 14 \text{ 分}

2、解 (1) 由题意, $PA = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta}$, $QA = \frac{4}{\cos \theta}$,

所以 $l = PA + QA = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta} + \frac{4}{\cos \theta} (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

(2) 设 $f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta} + \frac{4}{\cos \theta}$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

由 $f'(\theta) = -\frac{\sqrt{2}\cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{4\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$, 令 $f'(\theta) = 0$, 得 $\tan \theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

且当 $\theta \in (0, \theta_0)$, $f'(\theta) < 0$; 当 $\theta \in \left(\theta_0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(\theta) > 0$,

所以 $f(\theta)$ 在 $(0, \theta_0)$ 上单调递减, 在 $\left(\theta_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

所以当 $\theta = \theta_0$ 时, $f(\theta)$ 取得极小值, 即为最小值.

当 $\tan \theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 所以 $f(\theta)$ 的最小值为 $3\sqrt{6}$,

即这根竹竿能通过拐角处的长度的最大值为 $3\sqrt{6}m$.

因为 $3\sqrt{6} > 7$, 所以这根竹竿能从拐角处一直漂向东西向的水渠.

答: 竹竿能从拐角处一直漂向东西向的水渠.

3、解: (1) 因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a^2 = 4b^2$ 2分

又因为椭圆 C 过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{b^2} = 1$,3分

解得 $a^2 = 4$, $b^2 = 1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 5分

(2) 解法 1

设 $P(x_0, y_0)$, $-2 < x_0 < 2$, $x_0 \neq 1$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$.

因为 MB 是 PN 的垂直平分线, 所以 P 关于 B 的对称点 $N(2 - x_0, -y_0)$,

所以 $2 - x_0 = m$ 7分

由 $A(-2, 0)$, $P(x_0, y_0)$, 可得直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$,

令 $x = m$, 得 $y = \frac{y_0(m+2)}{x_0+2}$, 即 $M(m, \frac{y_0(m+2)}{x_0+2})$.

因为 $PB \perp MB$, 所以 $k_{PB} k_{MB} = -1$,

$$\text{所以 } k_{PB} k_{MB} = \frac{y_0}{x_0-1} \cdot \frac{\frac{y_0(m+2)}{x_0+2}}{m-1} = -1, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \frac{y_0^2(m+2)}{(x_0-1)(x_0+2)(m-1)} = -1.$$

$$\text{因为 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1. \text{ 所以 } \frac{(x_0-2)(m+2)}{4(x_0-1)(m-1)} = 1. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

因为 $x_0 = 2 - m$, 所以化简得 $3m^2 - 10m + 4 = 0$,

$$\text{解得 } m = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } m > 2, \text{ 所以 } m = \frac{5 + \sqrt{13}}{3}. \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

解法 2

①当 AP 的斜率不存在或为 0 时 , 不满足条件 . $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

②设 AP 斜率为 k , 则 $AP : y = k(x+2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = k(x+2), \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (4k^2+1)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0.$$

$$\text{因为 } x_A = -2, \text{ 所以 } x_P = \frac{-8k^2+2}{4k^2+1}, \text{ 所以 } y_P = \frac{4k}{4k^2+1},$$

$$\text{所以 } P(\frac{-8k^2+2}{4k^2+1}, \frac{4k}{4k^2+1}). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } PN \text{ 的中点为 } B, \text{ 所以 } m = 2 - \frac{-8k^2+2}{4k^2+1} = \frac{16k^2}{4k^2+1}. (*) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为 AP 交直线 l 于点 M , 所以 $M(m, k(m+2))$,

因为直线 PB 与 x 轴不垂直 , 所以 $\frac{-8k^2+2}{4k^2+1} \neq 1$, 即 $k^2 \neq \frac{1}{12}$,

$$\text{所以 } k_{PB} = \frac{\frac{4k}{4k^2+1}}{\frac{-8k^2+2}{4k^2+1} - 1} = \frac{-4k}{12k^2-1}, k_{MB} = \frac{k(m+2)}{m-1}.$$

因为 $PB \perp MB$, 所以 $k_{PB} k_{MB} = -1$,

$$\text{所以 } \frac{-4k}{12k^2-1} \cdot \frac{k(m+2)}{m-1} = -1. \quad (**) \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

将(*)代入 (**) , 化简得 $48k^4 - 32k^2 + 1 = 0$,

$$\text{解得 } k^2 = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{12}, \text{ 所以 } m = \frac{16k^2}{4k^2+1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } m > 2, \text{ 所以 } m = \frac{5 + \sqrt{13}}{3}. \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

4、解：(1) 因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } a^2 = 2b^2. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为直线 $l: x=2$ 被椭圆 E 截得的弦长为 2 ,

$$\text{所以点}(2, 1)\text{在椭圆上, 即 } \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

$$\text{解得 } a^2 = 6, b^2 = 3,$$

$$\text{所以椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 解法一：因为直线 PQ 与坐标轴不垂直 , 故设 PQ 所在直线的方程为 $y = kx + m$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

因为 PQ 的中点 R 在直线 $l: x=2$ 上, 故 $R(2, 2k+m)$.

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

消去 y , 并化简得 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$, 9 分

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1+2k^2} . \quad (*)$$

$$\text{由 } x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1+2k^2} = 4, \text{ 得 } 1+2k^2 = -km. \quad \textcircled{1} \text{ 12 分}$$

$$\text{因为 } M(1, 0), \text{ 故 } k_{MR} = \frac{2k+m}{2-1} = 2k+m,$$

$$\text{所以 } k_{MR} \cdot k_{PQ} = (2k+m)k = 2k^2 + km = 2k^2 - (1+2k^2) = -1,$$

$$\text{所以 } MR \perp PQ. \text{ 16 分}$$

解法二: 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

因为 PQ 的中点 R 在直线 $l: x=2$ 上, 故设 $R(2, t)$.

$$\text{因为点 } P, Q \text{ 在椭圆 } E: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 上, 所以 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases}$$

$$\text{两式相减得 } (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0. \text{ 9 分}$$

$$\text{因为线段 } PQ \text{ 的中点为 } R, \text{ 所以 } x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 2t.$$

代入上式并化简得 $(x_1 - x_2) + t(y_1 - y_2) = 0$ 12 分

又 $M(1, 0)$,

所以 $\vec{MR} \cdot \vec{PQ} = (2 - 1) \times (x_2 - x_1) + (t - 0) \times (y_2 - y_1) = 0$,

因此 $MR \perp PQ$ 16 分