

# 中学数学和大学数学的本质区别对学习和教学的影响

冯淑霞<sup>1</sup> 黎景辉<sup>1</sup> 梁志斌<sup>2</sup> 俞小祥<sup>3</sup> 朱一心<sup>2</sup>

(1. 河南大学 475004; 2. 首都师范大学 100048; 3. 江苏师范大学 221116)

## 1 引言

本文提出一个界别中学数学和大学数学的准则. 中学生希望借助这个准则, 中学老师可以帮助中学生对大学数学有个初步的认识, 帮助中学生在报考大学的时候对所选的学科有更精准的选择, 帮助中学生到了大学尽快完成从中学到大学的过渡. 也希望帮助本科一年级的导师, 指导大学生的选科和未来生涯规划, 帮助在读大学生更多地了解他们正在学的数学. 我们提出的简单准则是: 大学数学注重结构性及其实际应用, 计算性则是结构性的体现和应用. 文中将会解释什么是结构, 并让读者透过例子学习使用这个准则.

我们开始写这篇文章的时候, 只有几句话, 大家都觉得是很显然的. 但是当拿起笔来写时, 我们才知道, 这比平常写数学论文难. 大家心里都知道要讲的东西, 怎样把它说清楚却是不容易. 因此我们希望得到读者的支持, 不要因为我们说不清楚, 使你们看不明白而放弃读完全文. 若你是在校的本科生, 希望你会领会本文所提出的一个架构, 会用这个架构分析和解决你对数学的一些疑惑, 鼓励你学习数学. 我们明白, 对一些中学老师来说, 这并不是一篇容易懂的文章. 原因可能是, 在十年甚至几十年的教学和行政工作压力下, 大家或许已经忘掉一部分在大学时念的数学了. 不过我们相信, 只要老师拿出他们原有的对数学的热情, 跟学生谈本文的论题, 大家都会进步和收获的!

## 2 数学的计算性

让我们考虑数学的两个特征, 一是数学的计算性, 二是数学的结构性. 首先我们用个例子作个简单的说明.

考虑问题: 求  $x, y$  满足方程组  $4x + 3y = 2, x + y = 1$ . 我们可以把这个方程组写成矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

利用数学提供的方法我们算出答案:  $x = -1, y = 2$ . 我们称这样的一个过程为数学的计算性. 这个过程是: 从一个问题——解方程组  $4x + 3y = 2, x + y = 1$  开始, 找出解题的方法, 然后算出答案.

另一方面考虑方程组  $4x + 2y + 4z = 0, 2x + y + 2z = 0, 10x + 5y + 10z = 0$ . 这个方程组可以写成矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这个方程组的解组成一个 2 维线性空间. 这时我们关心的是「解」的数学结构, 这个结构就是一个线性空间. 这就是我们讲的数学的结构性——数学的研究对象是数学结构. 我们将在下一节对此作详细说明.

让我们继续谈数学的计算性. 一个比解线性方程组更简单的例子是: 求一个正实数的平方根. 比如:  $4 \rightarrow \sqrt{\phantom{x}} \rightarrow \pm 2$ . 我们可以表达这个过程为: 输入一个数字  $\rightarrow$  数学计算  $\rightarrow$  输出一个数字. 注意我们在此不是谈「计算方法」, 我们讲的是这个过程, 这个数学的性质, 数学的计算功能. 在此我们并没有讨论怎样算出  $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$  因为为了说明这里的内容, 我们需要了解极限的性质和实数的构造.

中学代数里经常见的一个问题是: 已给出实数  $b, c$  求复数  $x$  使得这个式子成立  $x^2 + bx + c = 0$ . 也可以说成因式分解: 已知实数  $b, c$  求复数  $a, d$  使得  $x^2 + bx + c = (x - a)(x - d)$ . 从这个问题可以变出很多题目, 中学生不知花了多少时间做

这些内容不变的计算习题!

微积分课的一个标准计算题是:给出几个简单的不定积分,如

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

然后要求同学用几个标准的方法去计算不定积分.

说到这里希望大家已经明白我们所指数学的计算性是什么了!做了大量习题的中学生,对我们说的数学的计算性虽然可能没有明确过,但心里还是清楚的.学到了大学一年级的微积分和线性代数,同学还是喜欢这些计算题的,因为这是他们熟识的数学.这样当数学课程一步一步的转向数学的另一个性质「数学的结构性」的时候,学生会惊叫:这不是数学!到学期末的时候,这个感叹常转为这样的问题:会不会考证明?到这个时候,甚至怀疑是否选错了专业!当学生说:老师教的都不是数学,他们的意思是说:都不是他们心里想象的数学;或者更准确一点:老师要他们学的不是他们在中学学的数学!因为这个心理障碍是使他们产生学习困难,甚至心底反抗学习数学.对一个数学专业的学生来说这是不利的,对一个数学系来说这是有破坏性的.因此,这就值得我们思考:我们怎样帮助熟悉中学数学的学生,顺利过渡到结构性内容高速增长的大学生态?

### 3 什么是一个数学结构

**3.1 最简单的「数学结构」是“整数”和“整数的加法运算”.**《九章算术》(东汉中期,不迟于公元100年)的“方程”章,在世界上首次阐述了负数及正负数的四则运算.现在整数运算是很多儿童,从幼儿园到小学用了三至五年学来的东西.你可能忘记了怎样学习1和2,去看看一个小孩,在不会写文字之前,他可能已经掌握1和2(两)这两个声音的数值意义.上学后,他要跃进一步,要学会 $1+1=2$ ;最后他学会的是怎样做老师给他的关于整数的题目,又因为这些题目和日常生活有关,他也学会了怎样使用整数.但是几乎可以肯定他不会把整数“和”看为是一个「数学结构」.让我们用代数学的语言来说明整数的数学结构.设 $\mathbf{Z}$ 记所有整数组成的集合,映射 $\alpha: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ 是整数的加法运算.则 $(\mathbf{Z}, \alpha)$ 是交换群.从这句话的表达方式来看,我们同意这不是中学数学,因为在这句

话背后是一个学期的集合论.数学是累积性很强的学问,像群这么简单的结构,开始时像一粒沙,很小,慢慢地累积起来成为一个庞大的组织,如果你有机会学习有限单群的分类便明白这个现象.群论首先是由欧洲数学家拉格朗日(Lagrange 1736—1813)、阿贝尔(Abel 1802—1829)、伽罗瓦(Galois 1811—1832)在十九世纪发展起来的.我们暂时放下这个最简单的例子.

**3.2 在整数之后,实数便出现在同学学习“数”的艰苦历程里.**也许大家不会把实数域看作一个「数学结构」.在大学一年级微积分课总得说清楚这些实数是怎样来的.很多课本用戴得金(Dedekind 1831—1916)分割法(例如,复旦大学,《数学分析》,上海科技出版社,1960年,上册第一章附录).对很多学生而言,这是个相当费解的结构.另外一个方法是从有理数列的极限开始,讲基本序列,循环小数,然后“不经意地”定义实数域为有理数域的完备化.请看一本优秀全创新的微积分教科书:王昆扬,《简明数学分析》,高等教育出版社,2001年(王教授在北京师范大学一年级和北京及青岛的中学用此书上课).这样,不单是把学生从初中二年级就已经知道的“无限不循环小数是无理数”这个概念说清楚,并且以后遇到距离空间的完备化,就不会觉得陌生.这个做法正是鼎鼎大名的Bourbaki数学系统定义实数的方法(见Bourbaki, Topologie General, Chap IV).完备化是连续性的一个基本结构.例如同一方法便从有理数域造出 $p$ 进数域——这是二十世纪的数学了.( $p$ 进数由Hensel(1861—1941)引入;最著名的应用便是在Wiles的费马大定理的证明中.)这样王昆扬书中的方法是承先(初中的循环小数)启后(完备化)!

**3.3 到了中学解方程遇到 $x^2+1=0$ ,复数便出现在我们的世界里.**我们一开始的例子是二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的求根公式

$$x = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}).$$

对三次多项式 $x^3 + 3px + 2q$ ,取 $a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$ ,  $b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$ ,  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ ,则三次方程 $x^3 + 3px + 2q = 0$ 的根的Cardano公式是 $a+b, \omega a + \omega^2 b, \omega^2 a + \omega b$ .四次方

程的根亦有类似公式. 可能有同学问: 可否给出次数 $\geq 5$ 的方程的根的公式?

我们先下个定义. 设  $f(x)$  是复数系数的多项式. 称方程  $f(x)=0$  为「可解」, 若方程的根可以由其系数通过加减乘除及开方(即 $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ )得出. 上面的二次公式和 Cardano 公式是这样的例子.

用代数学里的域扩张的伽罗瓦理论可以证明: 一般的次数 $\geq 5$ 的方程都不可解.

这个例子说明, 要回答一个学生很自然提出的问题, 我们需要建立一个相当深刻的数学结构, 我们称上面这个结构为伽罗瓦理论.

对打算当中学老师的学生, 我们建议他们学习伽罗瓦理论. 这样当学生问这个问题的时候, 你可以给出一个正确的答案, 当你描述这种证明这种结构的时候, 虽然你的学生不会明白, 但是你的信心令他们记得这件事, 让他们想到大学里去学习了解. 因此, 未来要当中学老师的学生说: 中学的数学我在中学时已经会做, 大学的数学我学来没用. 我们不同意这种说法.

**3.4** 让我们回到大家比较熟悉的情形. 考虑线性方程组  $AX=0$ , 其中  $A=(a_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵,  $a_{ij}$  是实数, 未知变量  $X$  是  $n \times 1$  矩阵. 我们以  $V_A$  记所有满足  $AX=0$  的  $n \times 1$  矩阵  $X$  所组成的集合. 我们要问集合  $V_A$  有什么性质? 这是不同于

前一节的计算问题: 给出  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ , 求

$X$ ? 在此我们是问: 不论  $A$  是什么,  $V_A$  有什么共同的性质? 这是个结构性的问题, 是我们在中学没有问过的问题. 这也是一个很好的例子, 说明中学数学和大学数学的本质区别——那就是在大学数学里, 我们关心的是发现及创造数学结构. 在线性代数课里我们学的是:  $V_A$  是一个线性空间. 「线性空间」就是我们要找的「数学结构」. 为什么这是重要的? 因为这种线性结构具有不寻常的一般性. 不仅在解线性方程组时如此, 而且在解微分方程和积分方程时也如此. 我们知道几乎所有现在的科技如筑桥、发电、飞机、火箭、探月、北斗系统等等都离不开这三类方程. 这就是为什么我们要在大专院校教线性代数, 教学生学会识辨「线性结构」「法力」的原因. 当同学明白这个道理的时候也许就不会觉得所学无用了.

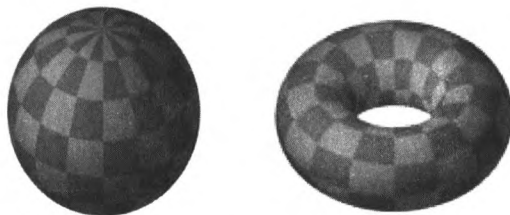
**3.5** 回头看看积分的计算:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x-8}}.$$

左边的积分等于反三角函数  $\arcsin x$ . 为什么老师不告诉我们右边的积分等于什么呢? 为了回答这个问题, 首先把这两个积分改写为

$$(1') \int_{C_0} \frac{dx}{y}, \quad (2') \int_{C_1} \frac{dx}{y},$$

其中  $\sin w_0 = x$ ,  $C_0$  是指  $y^2 = 1 - x^2$ ;  $p(w_1) = x$ ,  $C_1$  是指  $y^2 = 4x^3 - 4x - 8$ , 是我们要求的函数. 显然两个积分是同一个样子:  $\int \frac{dx}{y}$ , 不同的是  $C_0$  和  $C_1$ . 我们要用到中学里没有的大学数学: 复变函数论的黎曼曲面理论.  $C_0$  是紧单连通双叶黎曼面, 因此同构于黎曼球(三维空间的单位球面), 而  $C_1$  的拓扑亏格是 0.



另一方面,  $C_1$  是同构于车轮胎,  $C_1$  的拓扑亏格是 1. 显然不可以把球面连续变形为车轮胎的. 事实上  $p(w_1)$  是定义在车轮胎上的函数, 是个双周期函数. 而  $\sin w_0$  是一个单周期函数. 因此不定积分(2)是不可能写为初等函数. 请留意, 我们不是说: 还未有人写出来, 而是我们从数学结构知道这是不可能的. 这说明我们不能在中学数学课里讲不定积分(2)的原因, 是因为这两个不定积分背后的拓扑性质不同, 这个拓扑性质是一种数学结构的性质. 我们看到, 虽然只是简单的不定积分的计算, 我们也避不开数学的结构性! 更重要的是在这个过程中我们发现了新的东西, 拓扑学, 就是两个物体之间的新的性质——拓扑同胚, 而且这个性质是可以「量化」的, 用物体的亏格. 球面的亏格  $\neq$  车轮胎的亏格, 告诉我们球面和车轮胎不同胚, 就是说不可以把球面连续形变为车轮胎. 这是牛顿(1643—1727)之后一百年, 黎曼(1826—1866)的伟大发现. 这叫做「创新」! 亦有人会说这只是一个数学玩意, 没有用的. 作为回应, 请看看杨振宁先生在拿诺贝尔奖以前的第一篇获奖论文: Spontaneous magnetization of a two-dimen-

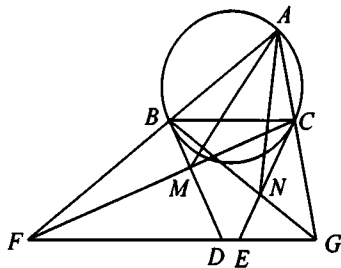
sional Ising model (1952 年发表获 Onsager 奖). 文中他纯熟地使用双周期函数计算自发磁化. 这篇文章的结果可谓前无古人后无来者——文章第一次给出二维可积系统的闭公式, 到目前还没有其他这样的公式.

3.6 现在我们开始讨论最后的例子: 平面几何学. 欧几里得是古希腊数学家, 约于公元前 325 年——公元前 265 年生活在亚历山大里亚, 现在是埃及的第二大城市. 平面几何学是一个严格的数学结构, 最早见于欧几里得所编著的《几何原本》, 此书的前 6 卷由徐光启和意大利神父利玛窦合译, 于 1607 年在北京出版; 英译本: T. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge University Press 1908, Dover Reprint.

《几何原本》的数学结构从 23 条定义开始, 接着是 5 条公理, 然后按逻辑演绎出其它定理. 例如, 从两直线互相垂直的定义 10 推导出: 两直线相交对顶角相等 (《几何原本》卷 I 命题 15). 在这个证明里, 我们可以看见平面几何学里最简单的计算.

《几何原本》学校用书的英语版本是 Hall 与 Stevens 写的 A School Geometry, Macmillan Company; 在 1970 年之前的一个世纪里, 这本书是英国、加拿大、澳洲、印度及香港的中学标准教科书. 书的排版方式是: 定义→公理→定理; 学生直接感受到一种一层一层的架构. 这样, 学习的重点是这个学问的架构, 是这个「数学结构」, 而不是学习那些专业补习老师“制作”出来的难得多的题目, 虽然这些难题并不只是计算, 它们是围绕着一名题和解题技巧发展出来的, 但已看不见《几何原本》的数学结构了, 如这个例子: 见下图, 在锐角三角形  $ABC$  中,  $\angle BAC \neq 60^\circ$ , 过点  $B, C$  分别作三角形  $ABC$  的外接圆的切线  $BD, CE$ , 且满足  $BD=CE=BC$ . 直线  $DE$  与  $AB, AC$  延长线分别交于点  $F, G$ . 设  $CF$  与  $BD$  交于点  $M$ ,  $CE$  与  $BG$  交于点  $N$ . 求证:  $AM=AN$ .

从上世纪五十年代开始欧美推行普及教育, 他们认为「数学结构」是一般人学不会的「抽象」东西. 戴上「抽象」帽子后「数学结构」便被打入十八层地狱, 永不翻身, 从全球的中学教育中消失了! 我们也避不开此劫. 让我们看看人民教育出版社



1989 年印的《初级中学课本·几何》第一册. 这本书基本是依照《几何原本》的次序, 书中有定义有证明, 却不是明确地印出「定义」, 「证明」的字样. 即编写时避开明确地说出「定义+公理→定理」这个架构, 偶然会这样说: 我们写出推理过程. 以实物类比来说明概念, 如第 50 页: “我们把这个事实作为公理: 平行公理”. 这样“公理”这个名词便出现了! 虽然 64 页开始说明命题、定理、证明, 但学生很难看清楚平面几何学的数学结构; 到 65 页把公理说成实践中总结出来的真命题并不太符合现行数理逻辑的做法. 话虽如此, 这还是一本好书, 有很多学生接受这种软接触方法.

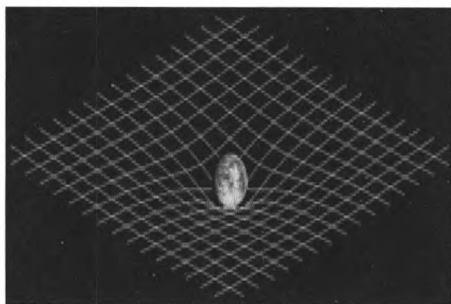
反观《几何原本》, 首先定义和公理, 然后证明命题. 例如以下命题: 给出两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 则这两条直线平行 (《几何原本》卷 I 命题 27). 它的证明是严格遵守「定义+公理→定理」这个架构的, 细看这个证明, 你会感觉到「平面几何学」的「数学的结构性」, 这是不同于前面提到卷 I 命题 15 的计算证明的. 我们常常要求学生证明一个命题, 对一个好的学生来说, 他实在不知道从哪里开始, 因为我们从来没告诉他这个公理系统, 没有说明这个架构, 没有说清楚起点是什么, 他只能盲目的团团转, 最后即使是弄出来, 也不知从哪里来的!

可能有人会说: 大家都差不多一样, 我们只是吹毛求疵. 请让我们指出一点以作说明: 当你看到欧几里得平面几何学就是这些定义、公理、定理所组成的整体, 自然就想问, 改变部分公理我们会得到什么样的「几何」?

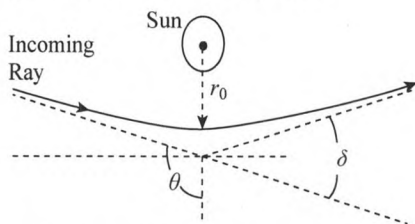
俄罗斯人罗巴切夫斯基 (1792—1856) 引入: 「过直线外一点可以引最少两条平行线」为新公理代替平行公理 (公理 5). 在新的公理体系中展开的推理, 得到了一系列在逻辑上无矛盾的新的定理, 并形成了新的理论. 这个理论像欧几里得几何一样是完善的、严密的几何学. 这样, 第一种「非欧几里得几何」便诞生了! 随后德国人黎曼 (1826

—1866)构造了与罗巴切夫斯基不同的几何.

到了 20 世纪初, 爱因斯坦成为第一个人用这些关于空间的新的「数学结构」去认识我们的宇宙! 举个例子, 牛顿力学第一定律: 「一切物体在没有受到力的作用时, 总保持静止状态或匀速直线运动状态」. 爱因斯坦认为可以把「直线」换为黎曼几何空间的「最短线」(即测地线), 也就是说: 一切物体沿空间的测地线运动. 这样, 太阳邻近的空间的测地线是弯曲的, 光线沿空间的测地线走, 所以我们所看到途经太阳的光线弯折了! 这就是「相对论」中太阳引力场的光线弯折的现象! 下图显示物质的引力场使周边的空间弯曲.



下图显示光线在太阳附近的弯折的现象. 1919 年 5 月 29 日, 天文学家 Eddington 利用对日食的观察, 证实了爱因斯坦的预测.



希望以上的例子说明了什么是「数学结构」, 也说明了在现象中看到「数学结构」不单只是解决数学问题的关键, 亦是创新应用的开始. 我们亦看到过去两个世纪数学的发展, 数学内容的增加很多体现在新的「数学结构」的构造和应用中. 中学数学与大学数学的区别, 就是要我们在大学里帮助学生把这两百年的数学追回来! 这也是为什么在大学数学课里不断地出现新定义来说明新的结构, 说明在中学和大学这两个阶段的数学训练是不同的. 为此也许有些中学生会对数学产生误会, 甚至以为自己的数学是非常好的. 如果他到了一个数学系, 一年级做一百条不定积分, 二年级解一百个数值不同的系数矩阵的线性方程组, 三年级用残数算一百条积分, 四年级学英语, 忙面试, 忙出国, 忙找工作, 忙找对象, ……他, 他会很快乐. 如

果他到了另一个数学系, 上的课是: 公理集合论, 一般拓扑学, 测度论, 泛函分析, 拓扑群论, 代数结构, 交换代数, 代数拓扑学, ……他就不一定能够适应了! 在一个很好的数学系的优秀少年班, 我们亦会遇上很会做奥数题的小孩子对复杂的数学系统没有兴趣、没有感觉, 随着压力增大, 精神慢慢的崩溃, 最后只好放弃了.

#### 4 教学建议

过去两个世纪不停创建的新结构是数学的核心成就. 中学的数学几乎不谈结构, 大学的数学里结构不停涌现. 前面已多次谈到这对学生的影响, 这对大学教学亦产生极大的困扰. 能力薄弱一点的院系基本上避开基础数学课, 不开拓扑学和代数课, 主要是教积分计算和解微分方程, 甚至索性只开考研习题班、竞赛解题班. 这也可, 但是这样训练出来的人, 不具备需要建立架构来解决问题的思维方法, 面对复杂的大型结构只好目瞪口呆.

三年高中学生做了无数的数学习题, 这些题目基本是考数学的计算性, 这对于数学这门有严密结构的学问是不够的. 因此当一个中学生面对结构性不停增强的大学数学时, 若抵不过这个压力便只好放弃. 数学系亦因为缺乏学生的支持只好开一些结构内容低一点的课, 这样学生又觉得念了四年好像没有学会什么, 结果是所有人都不满意. 中学老师训练学生解答决定大学入学的高考题、奥数题, 学生与数学关系是答题, 学生对数学是被动的有问则答而不是主动的求问. 在大学的数学课里, 学生几乎天天都遇到「定义」, 要去明白「定义」所介绍的新的「结构」, 学生的良性反应是: 这是什么? 为什么会这样? 如果不是这样会发生什么? ……学生要问自己、问同学、问老师、问课本, 换句话说, 学生要主动出击. 否则学生到了课堂只是抄定义, 并没有主动参与, 从莫名其妙很快变成漠不关心, 最后是完全放弃.

本文并不是讨论或批评中学数学的内容和教学方法. 我们不是说在中学办个「数学结构」课, 给出课本、大量例题和解答. 我们只是说, 若中学生完全没有接触过「数学结构」的东西, 他们到了大学便要加倍努力克服心理障碍跳入一个有「结构」存在的更广阔的世界. 我们是说, 只要鼓励老师对有兴趣和能力的中学生偶然提点一下, 便会让



他们将来觉得在大学见到的东西是很自然、很简单的. 此外同学们报考的时候也可以自问合适不合适念这种高结构性的学问. 因为即便所谓计算数学、应用数学, 它们的理论背景的结构性也还是很强的. 「数学结构」有内在的规律, 结构与结构之间有连结性, 没有单独存在只有一个例子的结构. 因此, 也许我们可以更改一点现行的数学教学安排.

我们的孩子是在一个动态世界成长的, 当他们看见老师在黑板上写下集合的公理的时候, 大叫「抽象」. 也许学生也不知道什么是抽象, 可能他们只是觉得黑板上的东西不会动而已. 就是说抽象是个主观评价. 一些东西, 开始的时候, 有人替你说清楚, 你便觉得是显然了. 比如若有人用动漫来说清楚「集合论中的罗素悖论」, 这是中学生也可以明白的趣事, 到了大学便不会觉得集合论是无中生有、自找麻烦啦, 这样做就需要投资. 教育是要投资的, 越发达的社会这个投资越高. 当然我们相信仍然会有数学奇才, 成年前未玩过手机, 数学是妈妈拿着一根竹子在地上划沙教的, 不过这不可能是在中国城市的孩子了.

在大学一年级, 老师或可以安排一些节目帮助新生认识大学数学, 加强同学的适应能力, 培养学习高年级数学的兴趣. 例如, 在解代数线性方程组出现的这个「线性结构」的现象, 早在本科一年级的微积分就出现了, 首先取极限  $\lim$  是一个线性算子, 因此微分和定积分也是线性算子; 到了学完微分与定积分关系的微积分基本定理后, 便以习题问: 基本定理这个等式是否保线性、为什么.

在 1958 年至 1977 年, 美国的一群大中学老师组织一个「学校数学研讨小组」(SMSG School Mathematics Study Group), 目的是把二十世纪的数学软化后在中学讲授, 他们完全失败了. 当然我们会学习他们失败的经验, 但是我们不会因为他们失败而放弃另觅新途. 随着 SMSG 的失败, 西欧和美洲的一般中学数学教育转为「快乐」教育 (1989 年美国中学数学教学标准 NCTM). 很多中学毕业的人不会  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{6}$ . 不过在美英法的一般中学之外, 却是有优秀的中学在提供另类的数学课程, 来训练学生成为基础科学家, 再加上用优厚条件从全球吸纳有天赋的青年人, 未来他

们就有足够的尖端人材了.

首先, 希望帮助学生开始认识二十世纪数学的老师需要有点学养, 要多知道点数学知识、数学历史, 要喜欢自己的工作对象——数学, 要当学生的数学成长导师. 其二, 我们需要有介绍现代数学的应用软件. 当然应用程式只是一种现代的手法, 核心的困难是怎样直接面对「数学结构」的内容. 第三, 我们需要一个热心发展数学教育的氛围, 各级的教育部/局, 中学校长/科主任, 大学的数学系主任, 不反对老师偶然谈谈二十世纪数学的内容和背景. 比如在教学大纲和课标增加一项: 课外数学介绍和讨论. 缺少以上三点可能是 SMSG 失败的原因. 更基本的区别是, 我们不支持他们软化数学的方法, 例如, 把平面拓扑学说成橡胶皮的变形, 结果大家莫明其妙. 我们支持讲授欧几里得平面几何公理, 就是说, 最少让学生学一个完整公理系统的例子. 我们没有说在目前的环境下换一口气更换中小学数学教育, 只是建议在适当的地方打开一个窗口, 说个现代数学的故事. 我们希望这个窗口慢慢地变成一个门, 慢慢地更多的中国人会用更多的现代数学. 这样可以发挥我们人多的力量, 团结创造更好的工艺科技. 作为一个人口大国, 我们的中小学数学教育, 从课本到补习班是个价值很高的市场, 怎样在这个市场规则下, 帮助学生学习多一点现代数学, 是我们未完全解决的问题.

有同学和青年教师建议我们去分析中学大学教学方法的差异, 学生学习方法的差异. 我们认为这是对本文主旨的极大误会. 教学法和学生指导是教育学的内容. 本文的主题是数学! 目前人类数学的 90% 是在过去 150 年创造的, 现代社会的生活、生产、国防背后使用的就是这些新数学. 这些数学的骨干是「数学结构」. 中小学教的数学和 1500 年前欧洲老师教的基本是一样的. 而大学的数学老师以惊人的速度、坚强的毅力带学生跃过一千五百年进入 21 世纪. 现在一年高考人数已达一千万, 入学人数七百万以上, 到排名前一百所的大学念数学的人数少于 0.5%, 能进入全国只有 13 所的一流数学系的大学的人数少于 0.05%. 因此我们只能希望有些老师偶然遇到一个有数学能力的孩子可以告诉他一些数学里的神奇的内容. (未完待续)