

2020 年江苏高考数学模拟试卷(二)

班级_____姓名_____学号_____评价_____

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0\}$, 则集合 $A \cup B =$ _____.
2. 已知复数 z 满足 $(2+i)z=5$, 其中 i 为虚数单位, 则复数 z 的模为_____.
3. 某工厂生产 A, B, C 三种不同型号的产品, 产量之比为 $1:2:3$. 现用分层抽样的方法抽取 1 个容量为 n 的样本, 若样本中 A 种型号的产品有 8 件, 则样本容量 n 的值为_____.
4. 从 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 六个数中任取 2 个数, 则取出的两个数不是连续自然数的概率是_____.
5. 从 2 个白球, 2 个红球, 1 个黄球中随机取出 2 个球, 则取出的 2 球中不含红球的概率是_____.
6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 则双曲线的两条渐近线方程为_____.
7. 若关于 x 的不等式 $ax^2 - 6x + a^2 < 0$ 的解集是 $(1, m)$, 则 m 的值为_____.
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y = xe^x$ 在 $x=1$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为_____.
9. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x > 1$, 若 $(x-1)(y-2)=1$, 则 $(x+1)(y+6)$ 的最小值为_____.
10. 若函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \ln x$, 则不等式 $f(x) < -e$ 的解集为_____.
11. 在轴截面为正三角形的圆锥内有一个球, 该球与圆锥的底面和母线均相切. 记该球的体积为 V_1 , 圆锥的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值为_____.
12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=5, AC=4$, 且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$. 设 M, N 分别是边 AB, AC 上的两个动点, 且 $MN=2$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最大值为_____.
13. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x+y=1$, 则 $\frac{x+2}{xy}$ 的最小值为_____.
14. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ f(x-1)+1, & x \geq 1 \end{cases}$. 若 $a \leq f(x) + kx \leq b (k \in \mathbf{R})$ 对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 则 $b-a$ 的最小值为_____.

二、解答题

15. 已知向量 $m = (\sqrt{3}\cos x, -1)$, $n = (\sin x, \cos^2 x)$.

(1) 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, 求 $m \cdot n$ 的值;

(2) 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 且 $m \cdot n = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$, 求 $\cos 2x$ 的值.

16. 如图 2-1 所示, 四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , $VB = VD$, E 是棱 VC 的中点.

(1) 求证: $VA \parallel$ 平面 BDE ;

(2) 求证: 平面 $VAC \perp$ 平面 BDE .

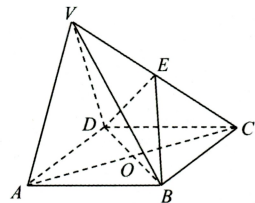


图 2-1

17. 现有一张半径为 1 m 的圆形铁皮,从中裁剪出一块扇形铁皮(如图 2-2 阴影部分),并卷成一个深度为 h m 的圆锥筒,如图 2-3.

(1) 若所裁剪的扇形铁皮的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ rad,求圆锥筒的容积;

(2) 当 h 为多少时,圆锥筒的容积最大? 并求出容积的最大值.

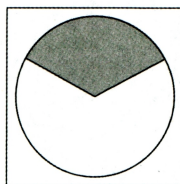


图 2-2

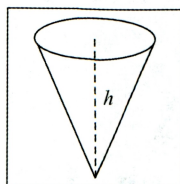


图 2-3

18. 如图 2-4 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ,左、右顶点分别为 A_1, A_2 ,下顶点为 B ,连接 BF 并延长交椭圆于点 P ,连接 PA_2, A_1B . 记椭圆的离心率为 e .

(1) 若 $e = \frac{1}{2}, A_1B = \sqrt{7}$. 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 PB 与直线 PA_2 的斜率之积为 $-\frac{9}{2}$,求 e 的值.

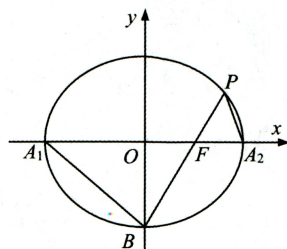


图 2-4

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若集合 $\left\{n \mid \frac{a_n}{3^n} > \lambda, n \in \mathbf{N}^*\right\}$ 中恰有两个元素, 求实数 λ 的取值范围;

(3) 若 $a_n = b_n + 2b_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $4b_2 - b_3 = 1$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列.

20. 已知函数 $f(x) = (x-a)\ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若对于任意的正数 x , $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的值;

(2) 设函数 $g(x) = 2f(x) + x (a > 0)$.

① 求证: 存在唯一实数 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $g'(x_0) = 0$;

② 若曲线 $g(x)$ 恒在 x 轴上方, 对于①中实数 x_0 , 求证: $\frac{1}{e} < x_0 < \sqrt{e}$.

(其中 $g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导函数, e 为自然对数的底数)

2020 年江苏高考数学模拟试卷(二)

附加题

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 评价_____

21.【选做题】本题包括 A、B、C 三小题,请选定其中两题,并在相应的答题区域内作答.若多做,则按作答的前两小题评分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. 选修 4-2:矩阵与变换

已知点 $P(a, b)$, 先对它作矩阵 $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 对应的变换, 再作 $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 对应的变

换, 得到的点的坐标为 $(4, 4\sqrt{3})$, 求实数 a, b 的值.

B. 选修 4-4:坐标系与参数方程

在极坐标系中, 已知直线 l 的极坐标方程是 $\rho \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sqrt{2}$, 圆 C 的极坐标方程是 $\rho = 4\cos\theta$, 求直线 l 被圆 C 截得的弦长.

22. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB \perp AC$, $AB=2$, $AC=4$, $AA_1=3$. D 是线段 BC 的中点.

(1) 求直线 DB_1 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值;

(2) 求二面角 $B_1-A_1D-C_1$ 的余弦值.

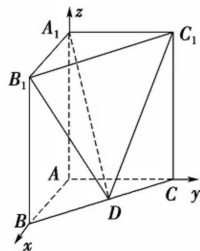


图 2-6

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 的值;

(2) 对任意正整数 n , a_n 小数点后第一位数字是多少? 请说明理由.