江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中考试热身练习 5

班级_____姓名_____学号_____评价_____

一、填空题：

1．设集合 $A=\{x|-1\le x\le 2\}$，$B=\{x|0\le x\le 4\}$，则 $A\cap B=$_____.

2．函数的 $y=\ln\left(x^2-x-2\right)$ 定义域是_____.

3．已知 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\tan\alpha=$_____.

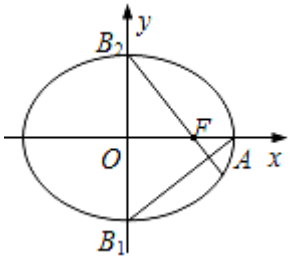
4．定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x-x^2$，则 $f(-1)+f(0)+f(3)$ $=$_____.

5．函数 $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2\,(x>0)$ 的值域是_____.

6．已知向量 a,b 的夹角为 $120°$，$|a|=4,|b|=3$, 则 $|2a+b|$ 的值为_____. .

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-4, x>0\\ -x-3, x<0\end{cases}$，若 $f(a)>f(1)$，则实数 a 的取值范围是_____.

8．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知 A，B_1，B_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的右、下、上顶点，F 是椭圆 C 的右焦点．若 $B_2F\perp AB_1$，则椭圆 C 的离心率是____.



9.数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后，得到函数 $f(x)$ 的图象，若函数 $f(x)$ 是偶函数，则 φ 的值等于_____.

10．在△ ABC 中，$A=90^o$，$AB=6$，且 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值为_____

11．设 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=\sqrt{3},\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}, C=\frac{\pi}{6}$，则 $b=$_____.

12．已知 $x+y=1,y>0,x>0$，则 $\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}$ 的最小值为_____.

二、解答题：

13.直角坐标系 xOy 中，已知向量 $\vec{m}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}),\vec{n}=(\sin x,\cos x),x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

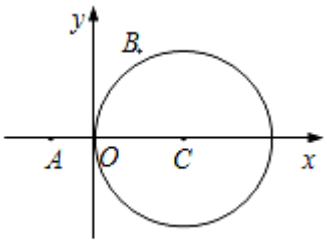
（1）若 $\vec{m}\perp\vec{n}$，求 $\tan x$ 的值；

（2）若 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 x 的值.

14.（14 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2+y^2-4x=0$ 及点 A（－1，0），B（1，2）

（1）若直线 l 平行于 AB，与圆 C 相交于 M，N 两点，MN=AB，求直线 l 的方程；

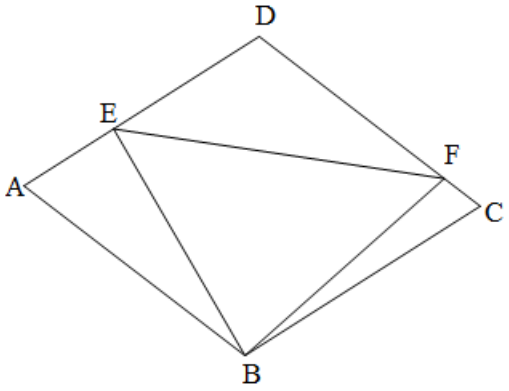
（2）在圆 C 上是否存在点 P，使得 $PA^2+PB^2=12$？若存在，求点 P 的个数；若不存在，说明理由.



15.如图，郊外有一边长为 200m 的菱形池塘 ABCD，，塘边 AB 与 AD 的夹角为 60°，拟架设三条网隔 BE, BF, EF，把池塘分成几个不同区域，其中网隔 BE 与 BF 相互垂直， E, F 两点分别在塘边 AD 和 DC 上，区域 BEF 为荷花种植区域，记 $\angle ABE = \theta$，荷花种植区域面积为 Sm^2.

（1）求 S 关于 θ 的函数关系式；

（2）求 S 的最小值.



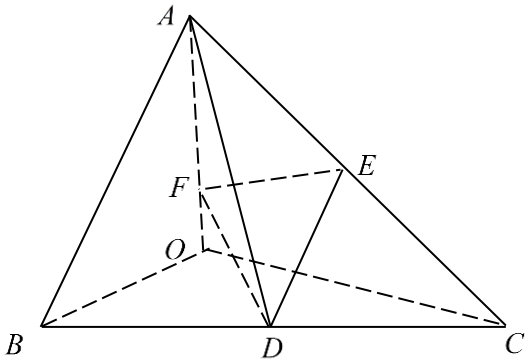
三、附加题

1.已知可逆矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix} b & -2 \\ -7 & a \end{bmatrix}$，求 A^{-1} 的特征值.

2. 如图，在三棱锥 $A-BOC$ 中，OA,OB,OC 两两垂直，点 D,E 分别为棱 BC,AC 的中点， F 在棱 AO 上，且满足 $OF=\frac{1}{4}OA$，已知 $OA=OC=4,OB=2$.

（1）求异面直线 AD 与 OC 所成角的余弦值；

（2）求二面角 $C-EF-D$ 的正弦值.



（第 2 题）

3.

3. 某同学在上学路上要经过 A、 B、 C 三个带有红绿灯的路口. 已知他在 A、 B、 C 三个路口遇到红灯的概率依次是 $\frac{1}{3}$、 $\frac{1}{4}$、 $\frac{3}{4}$，遇到红灯时停留的时间依次是 40 秒、 20 秒、 80 秒，且在各路口是否遇到红灯是相互独立的.

（1）求这名同学在上学路上在第三个路口首次遇到红灯的概率；，

（2）求这名同学在上学路上因遇到红灯停留的总时间.

1．$\{x\,|\,0\le x\le 2\}$； 2．$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$； 3．$-\frac{\sqrt{15}}{15}$； 4．$-2$； 5．$[-4,0]$；

6．7；7．$a<-1$或$a>1$；8．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$； 9．$\frac{\pi}{3}$；10．24

11．$\frac{3}{2}$或3； 12．$\frac{5}{4}$；

13. 解：（1）因为$\vec{m}\perp\vec{n}$，所以$\vec{m}\cdot\vec{n}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(\sin x,\cos x)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0$$ ----------4 分

所以$\sin x=\cos x$

因为$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\tan x=1$ ----------7 分

（2）由$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}}$

$$=\sin(x-\frac{\pi}{4})$$ ----------10 分

因为$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$x-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ ----------12 分

所以$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$，即$x=\frac{5\pi}{12}$ ----------14 分

14. 解：（1）圆 C 的标准方程为（x﹣2）^{2}+y^2=4，所以圆心 C（2，0），半径为 2.

因为 l∥AB，A（﹣1，0），B（1，2），所以直线 l 的斜率为$\frac{2-0}{1-(-1)}$=1，

设直线 l 的方程为 x﹣y+m=0，…（2 分）

则圆心 C 到直线 l 的距离为 d=$\frac{|2-0+m|}{\sqrt{2}}$=$\frac{|2+m|}{\sqrt{2}}$．…（4 分）

因为MN=AB=$\sqrt{2^2+2^2}$=2$\sqrt{2}$，

而CM^2=d^2+$(\frac{MN}{2})^2$，所以4=$\frac{(2+m)^2}{2}$+2，…（6 分）

解得 m=0 或 m=﹣4，

故直线 l 的方程为 x﹣y=0 或 x﹣y﹣4=0．…（8 分）

（2）假设圆 C 上存在点 P，设 P（x，y），则（x﹣2）^{2}+y^2=4，

$PA^2+PB^2=(x+1)^2+(y-0)^2+(x-1)^2+(y-2)^2=12$，

即 $x^2+y^2-2y-3=0$，即 $x^2+(y-1)^2=4$，…（10 分）

因为 $|2-2|<\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}<2+2$，…（12 分）

所以圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 相交，

所以点 P 的个数为 2．…（14 分）

15.

解：（1）依题意可得：$AB=BC=200$，

$\angle AEB=\frac{2\pi}{3}-\theta$，$\angle BFC=\frac{2\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\theta+\frac{\pi}{2}$

在 ΔABE 与 ΔBCF 中，由正弦定理可得：

$$\frac{BE}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle AEB},\quad \frac{BF}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BFC}$$

$$\therefore BE=\frac{AB\sin A}{\sin\angle AEB}=200\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{100\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}$$

$$BF=\frac{BC\sin C}{\sin\angle BFC}=200\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{100\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}BE\cdot BF=\frac{15000}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\cos\theta},\quad 0<\theta<\frac{\pi}{6}.$$

（2）记 $f(\theta)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\cos\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{6}$

则 $f(\theta)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\cos\theta$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\cos\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2\theta)+\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ 当且仅当：$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，

$f(\theta)$ 取得最大值，S 取得最小值.

$$\therefore S_{\min}=\frac{15000}{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}=60000\left(2-\sqrt{3}\right)$$（平方米）.

附加题

1. $a=5,b=3$ .....5 分

$\lambda_1=4+\sqrt{15},\lambda_2=4-\sqrt{15}$ .....10 分

2.（1）如图，以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}$ 方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系. 依题意可得：$O(0,0,0)$，$A(0,0,4)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$D(1,2,0)$，$E(0,2,2)$，$F(0,0,1)$ ·····2 分

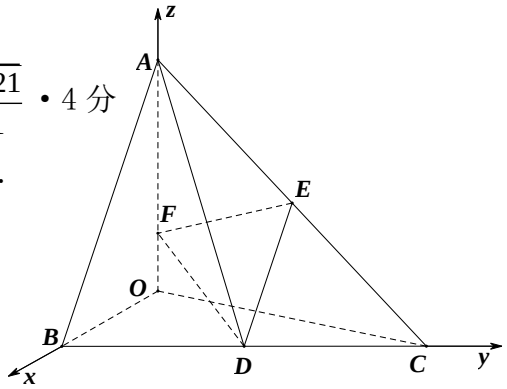
所以，$\overrightarrow{AD}=(1,2,-4)$，$\overrightarrow{OC}=(0,4,0)$

于是 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}=8$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{21}$，$|\overrightarrow{OC}|=4$，

所以，$\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OC}>=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{8}{4\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$ ·4 分

（2）平面 AOC 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 DEF 的一个法向量，



（第 2 题）

又 $\overrightarrow{EF}=(0,-2,-1),\overrightarrow{DE}=(-1,0,2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y+z=0,\\ x-2z=0.\end{cases}$

不妨取 $z=2$ ，则 $x=4,y=-1$，

所以 $\boldsymbol{m}=(4,-1,2)$ 为平面 DEF 的一个法向量，・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7 分

从而 $\cos<\overrightarrow{OB},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{(2,0,0)\cdot(4,-1,2)}{2\times\sqrt{21}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$，

设二面角 $C-EF-D$ 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{105}}{21}$.

因此二面角 $C-EF-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{21}$ ．・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・10 分

3．（1）设这名同学在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯为事件 A，

因为事件 A 等于事件“这名同学在第一和第二个路口没有遇到红灯，在第三个路口遇到红灯”，

所以事件 A 的概率为

$P(A)=(1-\dfrac{1}{3})\times(1-\dfrac{1}{4})\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$．・・・・・・・・・・・・・・・・・・4 分

（2）记“这名同学在上学路上因遇到红灯停留的总时间”为 ξ，

由题意，可得 ξ 可能取的值为 0，40，20，80，60，100，120，140(单位:秒) 5 分

∴即 ξ 的分布列是：

$P(\xi=0)=(1-\dfrac{1}{3})(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{3}{4})=\dfrac{1}{8}$；　$P(\xi=40)=\dfrac{1}{3}\times(1-\dfrac{1}{4})\times(1-\dfrac{3}{4})=\dfrac{1}{16}$；

$P(\xi=20)=(1-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{1}{4}\times(1-\dfrac{3}{4})=\dfrac{1}{24}$；　$P(\xi=80)=(1-\dfrac{1}{3})\times(1-\dfrac{1}{4})\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$；

$P(\xi=60)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times(1-\dfrac{3}{4})=\dfrac{1}{48}$；　$P(\xi=100)=(1-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{8}$；

$P(\xi=120)=\dfrac{1}{3}\times(1-\dfrac{1}{4})\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$；　$P(\xi=140)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{16}$

所以 $E\xi=40\times\dfrac{1}{16}+20\times\dfrac{1}{24}+80\times\dfrac{3}{8}+60\times\dfrac{1}{48}+100\times\dfrac{1}{8}+120\times\dfrac{3}{16}+140\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{235}{3}$.

答：这名同学在上学路上因遇到红灯停留的总时间为 $\dfrac{235}{3}$.　10 分