

极端思维切入,巧技妙法破解

● 江苏省张家港市乐余高级中学 刘晨玉

极端思维作为数学解题中的一种重要思维方式,往往可以实现从无限到有限,从近似到精确,从运动到静止,从量变到质变等方面合理化归与转化,置于死地而后生.特别是在破解一些涉及最值、取值范围的确定与求解等数学客观题中有奇效,借助题目条件中的极端要素(动点的极端位置、参数的极端取值等)入手来剖析问题.下面结合2021年高考真题实例,就几类常见的极端思维的应用加以剖析,结合题目条件确定极端要素,利用极端状态下对应的数学条件来特殊化处理,巧妙切入,化归转化,合理破解.

一、解析几何问题中的极端思维

破解解析几何问题中,经常借助“端点效应”特殊处理来进行极端思维,通过“动”与“静”的结合来确定线段长度、距离、角度等的变化规律,从而得以特殊化处理,合理巧妙转化与应用.

例1 (2021年高考数学新高考I卷第5题)已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点,点 M 在 C 上,则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为().

A. 13 B. 12 C. 9 D. 6

分析:根据椭圆的标准方程确定相应参数的值,结合椭圆图形的对称性,借助极端思维,利用动点 M 与椭圆的长轴的顶点、短轴的顶点重合时,对应的线段长度以及两线段长度的积,通过比较来判断相应的最大值问题.

解析:由于 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点,则知 $a=3, b=2, c=\sqrt{5}$,根据椭圆图形的对称性,当动点 M 与长轴的顶点重合时, $|MF_1|, |MF_2|$ 的值分别为 $a-c=3-\sqrt{5}, a+c=3+\sqrt{5}$,此时 $|MF_1| \cdot |MF_2| = (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 4$;

当动点 M 与短轴的顶点重合时, $|MF_1|, |MF_2|$ 的值均为 $a=3$,此时 $|MF_1| \cdot |MF_2| = 9$.

所以 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为9.

故选C.

点评:结合椭圆图形的对称性,利用椭圆中动点在两个极端位置——长轴与短轴的顶点处进行极端思维处理,确定在极端位置处的情况,再通过比较大小的确定,极端思维在解决平面解析几何中的相关问题时,以极端位置的特殊思维来解决,极具可行性.

二、平面向量问题中的极端思维

破解平面向量问题中,经常借助“动点”特殊处理来进行极端思维,通过“动”与“静”的结合来确定点的位置、向量的夹角、向量的模等的变化规律,从而得以特殊化处理,合理巧妙转化与应用.

例2 (2021年高考数学浙江卷第17题)已知平面向量 $a, b, c (c \neq 0)$ 满足 $|a|=1, |b|=2, a \cdot b=0, (a-b) \cdot c=0$.记平面向量 d 在 a, b 方向上的投影分别为 $x, y, d-a$ 在 c 方向上的投影为 z ,则 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值是_____.

分析:通过构造平面直角坐标系,确定平面向量 a, b 的坐标,结合条件设出平面向量 c 的坐标,利用平面向量的投影确定平面向量 d 的坐标,结合投影的几何意义确定参数 z 的值,进而建立参数 z 关于 x, y 的关系式,把关系式 $x^2 + y^2 + z^2$ 求解问题转化为平面直角坐标系中两点间的距离的平方与点到直线的距离的平方之和的问题,结合极端思维进行数形结合,利用几何的对称性确定代数式取得最小值时动点的位置,进而得以计算与确定对应代数式的最值问题.

解析:构造平面直角坐标系,令 $a=(1, 0), b=(0, 2), c=(m, n)$,根据题目条件 $(a-b) \cdot c=0$,可得 $(1, -2) \cdot (m, n)=0$,即 $m-2n=0$,亦即 $m=2n$,可设 $c=(2n, n)$,此时 $|c|=\sqrt{5}|n|$,而平面向量 d 在 a, b 方向上的投影分别为 x, y ,则有 $d=(x, y)$,可得 $d-a=(x-1, y)$,则有 $(d-a) \cdot c=(x-1, y) \cdot (2n, n)=2n(x-1)+ny=(2x+y-2)n$,又 $d-a$ 在 c 方向上

的投影为 z , 利用投影的几何意义可得 $z = \frac{(d-a) \cdot c}{|c|}$
 $= \frac{(2x+y-2)n}{\sqrt{5}|n|} = \pm \frac{2x+y-2}{\sqrt{5}}$, 则知 $x^2 + y^2 + z^2 =$
 $x^2 + y^2 + \left(\frac{|2x+y-2|}{\sqrt{5}} \right)^2$, 其表示的是平面直角坐
 标系中的点 $D(x, y)$ 到坐标原点的距离的平方与该
 点到直线 $l: 2x + y - 2 = 0$ 的距离的平方之和的最小
 值.

如图 1 所示, 过坐标原点 O 作
 直线 $l: 2x + y - 2 = 0$ 的垂线, 垂足
 为点 P , 根据两个距离的平方的对
 称性, 取 OP 的中点 Q , 结合极端思
 维, 可知当点 D 与点 Q 重合时, 就
 是代数式的 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值
 的取值点, 此时坐标原点 O 到直线

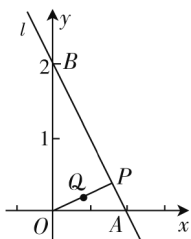


图 1

l 的距离为 $d = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

所以 $(x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{2}{5}$, 此时

$Q\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, 所以 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值是 $\frac{2}{5}$.

故填答案: $\frac{2}{5}$.

点评: 在动点有限制规律变化的背景中, 合理
 联想, 结合代数式的特征联想到两点间的距离公
 式、点到直线的距离公式, 通过极端思维, 借助数形
 结合直观确定取得最值时动点的位置, 进而加以合
 理破解. 极端思维在解决平面向量中的相关问题
 时, 以极端位置、极端取值的特殊思维来解决, 转化
 巧妙, 破解简捷.

三、立体几何问题中的极端思维

破解立体几何问题中, 经常借助“动点”特殊处
 理来进行极端思维, 通过“动”与“静”的结合来确定
 点、线、面的位置关系、角度与长度等的变化规律,
 从而得以特殊化处理, 合理巧妙转化与应用.

例 3 (2021 年高考数学上海卷第 9 题) 在圆柱
 中, 底面圆的半径为 1, 高为 2, 上底面的直径为 AB , C
 是底面圆弧上的一个动点, 绕着底面圆周转, 则
 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 _____.

分析: 借助空间几何图形直观分析, 利用三角
 形面积的转化, 把面积的取值转化为其中一线段长
 度的

变化问题, 结合动点的变化规律, 利用极端思维, 确
 定在不同位置背景下线段长短的极端值, 进而得以确
 定面积的取值范围.

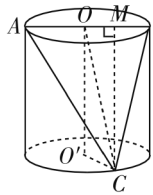


图 2

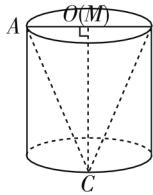


图 3

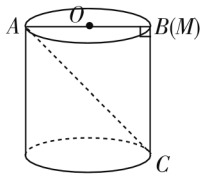


图 4

解析: 如图 2, 圆柱上底面的圆心记为 O , 下底面
 的圆心记为 O' , 连接 OC , 过点 C 作 $CM \perp AB$, 垂足为
 点 M , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| |CM|$, 根据题意, $|AB|$ 为
 定值 2, 所以 $S_{\triangle ABC}$ 的大小随着 $|CM|$ 的长短变化而变
 化, 结合极端思维, 利用动点 C 的旋转变带点 M
 的变化.

如图 3 所示, 当点 M 与点 O 重合时, $|CM| =$
 $|OC| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 此时 $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值, 为 $\frac{1}{2}$
 $\times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$.

如图 4 所示, 当点 M 与点 B (或点 A) 重合时,
 $|CM|$ 取最小值 2, 此时 $S_{\triangle ABC}$ 取得最小值, 为 $\frac{1}{2} \times 2 \times$
 $2 = 2$.

综上所述, $S_{\triangle ABC}$ 的取值范围为 $[2, \sqrt{5}]$.

故填答案: $[2, \sqrt{5}]$.

点评: 结合立体几何图形的直观性, 利用三角
 形面积的确定, 结合动点在圆柱底面圆周上的两个极
 端位置进行极端思维处理, 确定在极端位置处线段长
 度的极端取值, 进而来确定面积的取值问题. 极端思
 维在解决立体几何中的相关问题时, 以极端位置的
 特殊思维来解决, 直观可操作.

极端思维也是一种由一般到特殊, 以“点”代“面”
 的思维方式, 在实际应用中, 关键点是巧妙抓住问题
 的全体对象中的极端情形或其所具有的某种极端状
 态加以直接特殊化研究. 借助极端思维, 可以合理避
 开抽象的逻辑推理和复杂的代数运算, 探索解题的
 新思路与新方法, 另辟蹊径, 有效降低解题难度, 优
 化解题过程, 起到事半功倍的效果. 只是在具体利用
 极端思维处理问题时, 有时容易因为问题的特殊性而
 导致错误, 要合理验证, 纠正偏差, 正确应用. **W**