

问题促进思考 探究提升能力

唐毅 (江苏省镇江第一中学 212016)

刘新春 (江苏省扬中高级中学 212200)

《普通高中数学课程标准(2017年版)》明确指出:通过高中数学课程的学习,学生能获得进一步学习以及未来发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验(简称“四基”);提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力(简称“四能”).

新课标对学生的“四能”提出了较高的要求.回顾平时的数学课堂教学,学生往往被一个个的问题牵着走,被动地应付回答问题、解决问题(主要是简单的判断和解决一个个的数学习题),没有主动思考的时间和欲望,不会从问题出发思考问题是从哪里来的、问题中隐藏着怎样的规律、解决问题的过程又孕育着什么样的新问题.学生满足于被动回答或做完数学习题,没有将习题转化为新的问题.

要解决学生出现的上述问题,教师首先要有一双发现问题的慧眼.好的问题像蘑菇,往往会一簇簇出现,好的问题还会孕育出许多新的问题.以解题教学为例,教师在给学生呈现一个数学问题前,首先要精心设计好一串问题,帮助学生理解题意、发现联系、领悟规律,明白问题的实质.在对问题的多方思考中产生解决问题的思路.在解决问题的过程中,教师要诱导、启发学生萌生疑问、发现问题,帮助学生感悟解决问题的策略与方法.在问题解决后要提供反思、领悟的时机和策略,让学生学会在总结规律的过程中产生新问题.事实上,尽管“发现问题比解决问题更重要”,但学生提出问题的能力并不一定是产生于分析问题、解决问题以前,而是诞生于解决问题的过程与解决问题以后的总结、反思之中.因为发现问题的过程是建立在理解深化的基础上的,数学能力水平越低,往往越提不出价值较高的问题.

以下举一例说明如何以问题促进思考、以问题启发解决、以问题孕育问题,培养学生的“四能”.

问题 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点均在椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上,且三角形的重心在椭圆的中心,试

求 $\triangle ABC$ 的面积.

1 设计问题,启发思考

此问题中的条件与结论都比较清晰,但稍作思考就会发现, $\triangle ABC$ 的三个顶点似乎不确定,自然而然地怀疑这样的三角形是否存在.如果存在,三个顶点不确定,三条边不固定,底边和高均不知道,如何求三角形的面积?可否选择确定一个顶点或一条边,求出相应的三角形的面积,再探求一般三角形的面积?因此,在寻找求解策略和方法时,可以设计如下问题帮助学生分析题意,找到解题思路.

(1) 满足条件的三角形是否存在?

(2) 如果给定一个顶点,能否求出三角形面积?

(3) 在不知道底边和顶点位置的情况下,如何表示边长和高,求出三角形面积?

对于问题(1),如果取一个顶点位于椭圆的左顶点 $(-2, 0)$,则另两个顶点 B, C 为直线 $x=1$ 与椭圆的交点,不难确认符合条件的三角形存在.对于椭圆上任意一点 $A(x_0, y_0)$,由 $\triangle ABC$ 的重心在原点,可知 BC 边的中点坐标为 $(-\frac{x_0}{2}, -\frac{y_0}{2})$.设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,由题意知 $3x_1^2 + 4y_1^2 = 12, 3x_2^2 + 4y_2^2 = 12$,两式相减有 $3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$.由 $x_1 + x_2 = -x_0, y_1 + y_2 = -y_0$ 可得 $k_{BC} = \frac{3x_0}{4y_0}$,从而直线 BC 的方程为 $y + \frac{y_0}{2} = -\frac{3x_0}{4y_0}(x + \frac{x_0}{2})$,化简得 $3x_0x + 4y_0y + 6 = 0$.验证后可知满足条件的三角形存在.

对于问题(2),不妨设 $A(x_0, y_0)$,由上可知 BC 边所在直线方程为 $3x_0x + 4y_0y + 6 = 0$,与椭圆方程联立并消去 y ,化简得 $x^2 + x_0x + x_0^2 - 3 = 0$.

$$\text{从而 } BC = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(1 + \frac{9x_0^2}{16y_0^2}\right) [x_0^2 - 4(x_0^2 - 3)]} \\
&= \sqrt{\frac{16y_0^2 + 9x_0^2}{16y_0^2} (12 - 3x_0^2)} \\
&= \sqrt{\frac{16y_0^2 + 9x_0^2}{16y_0^2}} \cdot 4y_0^2 \\
&= \frac{\sqrt{16y_0^2 + 9x_0^2}}{2}.
\end{aligned}$$

又因为点 A 到 BC 边的距离等于原点到 BC 边距离的 3 倍, 即 $h = \frac{18}{\sqrt{9x_0^2 + 16y_0^2}}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{9x_0^2 + 16y_0^2}}{2} \times \frac{18}{\sqrt{9x_0^2 + 16y_0^2}} = \frac{9}{2}$.

对于问题(3), 可以直接假设 BC 边所在直线的方程为 $y = kx + m$ (不妨设斜率存在), 代入椭圆方程消去 y , 化简得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$ ($\Delta > 0$). 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}$, 从而 BC 中点坐标为 $\left(-\frac{4km}{3 + 4k^2}, \frac{3m}{3 + 4k^2}\right)$. 由 $\triangle ABC$ 的重心在原点可得点 A 坐标为 $\left(\frac{8km}{3 + 4k^2}, -\frac{6m}{3 + 4k^2}\right)$, 代入椭圆方程并化简得 $4m^2 = 3 + 4k^2$. 由两点间距离公式可得

$$\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{(1 + k^2) [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} \\
&= \sqrt{(1 + k^2) \left[\frac{64k^2 m^2}{(3 + 4k^2)^2} - \frac{16(m^2 - 3)}{3 + 4k^2} \right]} \\
&= \sqrt{\frac{16(1 + k^2) [4k^2 m^2 - (m^2 - 3)(3 + 4k^2)]}{(3 + 4k^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{16(1 + k^2) (12k^2 - 3m^2 + 9)}{(3 + 4k^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{16(1 + k^2) \cdot 9m^2}{(4m^2)^2}} \\
&= \frac{3\sqrt{1 + k^2}}{|m|}.
\end{aligned}$$

而点 A 到 BC 边的距离等于原点到 BC 边距离的 3 倍, 由点到直线的距离公式可求出高 $h = \frac{3|m|}{\sqrt{1 + k^2}}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{1 + k^2}}{|m|} \times \frac{3|m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{9}{2}$.

进一步思考, 本题中核心条件是 $\triangle ABC$ 的重心在原点, 联想重心坐标公式就会想到三角形三个顶点的坐标, 再联想到 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle OBC} = \frac{3}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 这一公式 (面积公式的证明略), 就会自然想到问题(4); 如果假设 B, C 两点坐标, 能否直接求出 $\triangle ABC$ 的面积?

设 $\triangle ABC$ 的顶点 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则由三角形的重心在原点, 可得点 A 的坐标为 $A(-(x_1 + x_2), -(y_1 + y_2))$. 因为 $\triangle ABC$ 的三个顶点均在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上, 所以

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12, & \text{①} \\ 3x_2^2 + 4y_2^2 = 12, & \text{②} \\ 3(x_1 + x_2)^2 + 4(y_1 + y_2)^2 = 12. & \text{③} \end{cases}$$

将 ③ 式展开, 并将 ①② 两式代入, 化简可得 $3x_1 x_2 + 4y_1 y_2 = -6$.

① $\times$ ②, 得 $9x_1^2 x_2^2 + 16y_1^2 y_2^2 + 12x_1^2 y_2^2 + 12x_2^2 y_1^2 = 144$. 配方得 $9x_1^2 x_2^2 + 24x_1 x_2 y_1 y_2 + 16y_1^2 y_2^2 + 12x_1^2 y_2^2 - 24x_1 x_2 y_1 y_2 + 12x_2^2 y_1^2 = 144$, 即 $(3x_1 x_2 + 4y_1 y_2)^2 + 12(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = 144$, 将 $3x_1 x_2 + 4y_1 y_2 = -6$ 代入, 得 $|x_1 y_2 - x_2 y_1| = 3$. 因此, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle OBC} = \frac{3}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{9}{2}$.

以上设计了 4 个问题, 引导学生从不同角度思考问题的条件与结论之间的联系, 从中发现解决问题的思路.

2 关注过程, 发现问题

在解决问题的过程中, 我们也可以发现许多问题. 如: 不论三角形如何变化, 三角形的面积是定值, 这个定值应该与椭圆相关, 对于其他的一般椭圆是否也有类似的结论?

思考发现, 由椭圆的面积为 πab , 内接 $\triangle ABC$ 的面积是椭圆的一部分, 因此与 ab 有关. 比较发现, $\frac{9}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab$. 这个结论是否正确? 对一般的椭圆是否成立? 可以类比问题(4)的解决过程.

设 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $C(-(x_1 + x_2), -(y_1 + y_2))$, 因为三角形的三个顶点均在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上, 所以有

$$\begin{cases} b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2, & \textcircled{1} \\ b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2, & \textcircled{2} \end{cases} \text{ 先将}$$

$$b^2(x_1 + x_2)^2 + a^2(y_1 + y_2)^2 = a^2 b^2. \textcircled{3}$$

③式展开,并把①②两式代入,得 $b^2 x_1 x_2 +$

$$a^2 y_1 y_2 = -\frac{1}{2} a^2 b^2 (*). \text{ 再将 } \textcircled{1} \times \textcircled{2}, \text{ 得 } b^4 x_1^2 x_2^2 +$$

$$a^4 y_1^2 y_2^2 + a^2 b^2 x_1^2 y_2^2 + a^2 b^2 x_2^2 y_1^2 = a^4 b^4, \text{ 配方得}$$

$$b^4 x_1^2 x_2^2 + 2a^2 b^2 x_1 x_2 y_1 y_2 + a^4 y_1^2 y_2^2 + a^2 b^2 (x_1^2 y_2^2 -$$

$$2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2) = a^4 b^4, \text{ 即 } (b^2 x_1 x_2 +$$

$$a^2 y_1 y_2)^2 + a^2 b^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = a^4 b^4. \text{ 将 } (*)$$

$$\text{式代入,得 } |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} ab, \text{ 从而 } S_{\triangle ABC} =$$

$$3S_{\triangle OAB} = \frac{3}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab.$$

也可以类比问题(3)的求解过程证明.设 BC 所在直线方程为 $y = kx + m$ (斜率不存在时可验证得到),联立方程组

$$\begin{cases} y = kx + m, & \textcircled{1} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. & \textcircled{2} \end{cases} \text{ 将 } \textcircled{1} \text{ 代入}$$

$$\textcircled{2} \text{ 并化简,得 } (b^2 + a^2 k^2)x^2 + 2a^2 kmx + a^2 m^2 -$$

$$a^2 b^2 = 0. \text{ 设 } B(x_1, y_1), C(x_2, y_2), \text{ 由韦达定理得}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2a^2 km}{b^2 + a^2 k^2}, x_1 x_2 = \frac{a^2 m^2 - a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}, \text{ 则 } BC$$

$$\text{中点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{-a^2 km}{b^2 + a^2 k^2}, \frac{mb^2}{b^2 + a^2 k^2} \right), \text{ 由 } \overline{AO} =$$

$$2\overline{OM} \text{ 可得点 } A \text{ 坐标为 } \left(\frac{2a^2 km}{b^2 + a^2 k^2}, \frac{-2mb^2}{b^2 + a^2 k^2} \right). \text{ 设}$$

$$\text{原点 } O \text{ 到 } BC \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}, BC =$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} =$$

$$\sqrt{(1+k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}, \text{ 从而 } S_{\triangle ABC} =$$

$$\frac{1}{2} BC \cdot d = \frac{3}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot$$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}, S_{\triangle ABC} =$$

$$\frac{9}{4} m^2 \left[\frac{4a^4 k^2 m^2}{(b^2 + a^2 k^2)^2} - \frac{4(a^2 m^2 - a^2 b^2)}{b^2 + a^2 k^2} \right] =$$

$$\frac{9m^2}{(b^2 + a^2 k^2)^2} [a^4 k^2 m^2 - (a^2 m^2 - a^2 b^2)(b^2 +$$

$$a^2 k^2)] = \frac{9a^2 b^2 m^2}{(b^2 + a^2 k^2)^2} (b^2 + a^2 k^2 - m^2) (*). \text{ 因}$$

$$\text{为点 } A \text{ 在椭圆上, 所以有 } \frac{4a^2 k^2 m^2}{(b^2 + a^2 k^2)^2} +$$

$$\frac{4m^2 b^2}{(b^2 + a^2 k^2)^2} = 1, \text{ 化简得 } m^2 = \frac{1}{4} (b^2 + a^2 k^2). \text{ 将}$$

$$\text{此式代入 } (*) \text{ 式, 得 } S_{\triangle ABC}^2 = \frac{9a^2 b^2}{(b^2 + a^2 k^2)^2} \cdot$$

$$\frac{1}{4} (b^2 + a^2 k^2) \left[b^2 + a^2 k^2 - \frac{1}{4} (b^2 + a^2 k^2) \right] = \frac{27}{16} \times$$

$$\frac{a^2 b^2 (b^2 + a^2 k^2)^2}{(b^2 + a^2 k^2)^2} = \frac{27}{16} a^2 b^2, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab.$$

3 总结经验,提出问题

以上我们从多个角度提出问题,探究了解问题的策略和方法.回顾问题的求解过程,有许多问题值得发问:圆可以看做椭圆的特例,重心在圆心的内接三角形面积是否为定值?此时三角形的形状如何?不难发现,重心在圆心的内接三角形是正三角形,容易求得圆内接三角形的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$. 反过来,如果将圆均匀压缩为椭圆,圆内接正三角形的重心仍然在椭圆中心吗?

设圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 内接 $\triangle ABC$ 的三个顶点

$$A(a \cos \alpha, a \sin \alpha), B\left(a \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right), a \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right),$$

$$C\left(a \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right), a \sin \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right)\right), \text{ 圆 } x^2 + y^2 =$$

$$a^2 \text{ 经过压缩变换 } \begin{cases} x = x', \\ y = \frac{a}{b} y', \end{cases} \text{ 得到椭圆 } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} =$$

$$1, \text{ 则 } A, B, C \text{ 三点变换成 } A'(a \cos \alpha, b \sin \alpha),$$

$$B'\left(a \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right), b \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right),$$

$$C'\left(a \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right), b \sin \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right)\right), \text{ 则 } \triangle A'B'C'$$

的重心的横坐标为

$$\frac{a}{3} \left[\cos \alpha + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \right] =$$

$$\frac{a}{3} \left[2 \cos \frac{\alpha + \alpha + \frac{4\pi}{3}}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha - \frac{4\pi}{3}}{2} + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \right] =$$

$$\frac{a}{3} \left[-\cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \right] = 0. \text{ 同理可}$$

得纵坐标为 0. 故 $\triangle A'B'C'$ 的重心仍在椭圆中心, 因而椭圆内接三角形的面积仍然是定值

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} ab.$$

既然椭圆中存在内接三角形使得其重心在椭圆中心, 类比双曲线, 可以提出相似的问题: 存在顶点均在双曲线上且重心在双曲线中心的三角形

(下转第 41 页)

讲授知识,这些知识需要学生在课后完成自主探究,他们可以从身边的生活数学出发,还能自主地研究数学知识,能在任何时候去查阅需要的材料,教师也能有更多的时间与每个人交流,实现了实验从动手到脱手的目的和意义.在课后,学生自主规划数学学习内容、学习节奏、风格和呈现知识的方式,教师则采用讲授法和协作法来满足学生的需要和促成他们的个性化实验学习,其目标是为了让学生通过实践获得更真实的学习.动手做数学的目的是为了让学习更加灵活、主动,让学习的参与度更高,让学生更加喜欢数学,能够自主地构建数学模型,培养学生的创新思维能力,很好地运用数学知识解决实际问题,从而给我们数学课注入了许多活力,放飞了学生的思想,展现了学生的能力,突破了教学桎梏,最终实现了使学生理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法,获得基本的数学活动经验,给与学生一个“完整的数学”^[3].

3.3 双向关联,收获成长

通过数格点算面积的数学实验,学生会在“游戏”“赏析”中提出猜想,进行思考,做出判断,找

(上接第33页)

吗?如果存在,其面积是否为定值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$?

不妨先考虑三角形一个顶点 A 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点,则 BC 边应以 $(\frac{a}{2}, 0)$ 为中点,此时 B, C 两点不存在.若点 A 是异于双曲线顶点的任意一点,设 $A(x_0, y_0)$,由 $\triangle ABC$ 的重心在原点,则 AB 边的中点为 $(-\frac{x_0}{2}, -\frac{y_0}{2})$. 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则 $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, $b^2 x_2^2 - a^2 y_2^2 = a^2 b^2$, 两式相减化简有 $k_{BC} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 因而直线 BC 的方程为 $y + \frac{y_0}{2} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x + \frac{x_0}{2})$,

寻到证明的方法.这种“外在”的操作活动与“内在”的思维活动的协调一致,就是推理能力的发展.在本次数学实验中,学生从其自身经验出发,动手操作、动脑思考,亲身经历真正的解决问题的过程,这就是建立模型的过程.数学实验不仅仅是直观地“做”,还要有意识地“用”^[4].在第二阶段中联系学生的生活实际,帮助学生进一步形成“由数学看现实,由现实想数学”的意识和习惯,发展学生的数学应用意识.数学实验构建了发展学生创新意识的课程环境,学生在操作、观察、猜想等活动中敢于改变,超越常规、学会创新,从而为他们学会改变、结出创新之果而奠基.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准2011年版[M].北京:北京师范大学出版社,2011.
- [2] 姚强.数学实验,贵在切时切需[J].中小学数学(初中版),2017(Z2):82-84.
- [3] 程玉娟.基于新课标下初中数学实验微课模式建构的研究与思考[J].数学教学通讯,2020(2):71+83.
- [4] 董林伟,赵维坤.初中数学实验课程开发与实践探索[J].江苏教育研究,2017(1):33-36.

化简得 $b^2 x_0 x - a^2 y_0 y + \frac{1}{2} ab = 0$. 与双曲线方程联立可验证关于 $x(y)$ 的方程无解,即说明这样的三角形不存在.

此外,我们还可以发现,如果椭圆内接三角形的重心在椭圆中心,则任意一边所在直线与过相应顶点的椭圆的切线平行.

4 结语

从教师设计问题抛砖引玉,帮助学生弄清题意,寻找求解思路,到边求解边发现新问题,再到总结回顾产生新问题并解决新问题,这是一个问题倍出的历程.学生不断经历“问题—分析—解决—问题”的过程,学生的“四能”必然获得提升.