

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学寒假自主练习 (2)

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 9\}$, $B = \{x | 0 < x < 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 3, 4\}$ C. $\{x | 1 \leq x \leq 5\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 5\}$

2. 已知复数 z 满足 $z(1-i)^2 = 1+i$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()

A. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

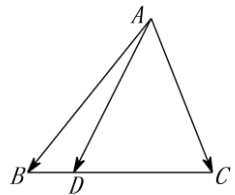
3. “ $0 < x < 4$ ”是“ $\log_2 x < 1$ ”的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

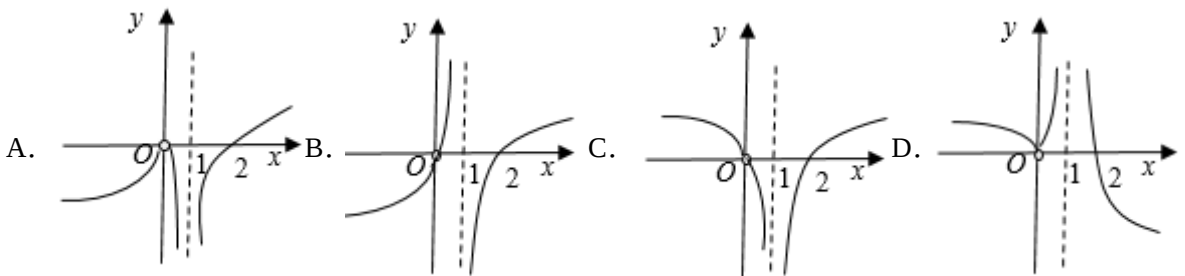
4. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BD}$, 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$, 正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

C. $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$



5. 函数 $f(x) = \frac{x \lg |x-1|}{|x|}$ 的函数图象是 ()



6. 2019 年 4 月, 习近平总书记专程前往重庆石柱考察了“精准脱贫”工作. 为进一步解决“两不愁, 三保障”的突出问题, 当地安排包括甲、乙在内的 5 名专家对石柱县的 3 个不同的乡镇进行调研, 要求每个乡镇至少安排一名专家, 则甲、乙两名专家安排在同一乡镇的概率为 ()

A. $\frac{6}{25}$ B. $\frac{3}{20}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{11}{40}$

7. 已知点 O 为双曲线 C 的对称中心, 直线 l_1, l_2 交于点 O 且相互垂直, l_1 与 C 交于点 A_1, B_1 , l_2 与 C 交于点 A_2, B_2 , 若使得 $|A_1B_1| = |A_2B_2|$ 成立的直线 l_1, l_2 有且只有一对, 则双曲线 C 的离心率的取值范围是 ()

A. $(1, 2]$ B. $(1, \sqrt{2}]$ C. $[\sqrt{2}, 2]$ D. $(\sqrt{2}, +\infty)$

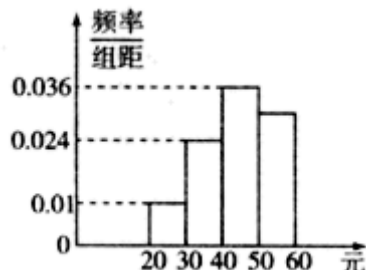
8. 设函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是单调函数, 且 $\forall x \in (0, +\infty), f[f(x) - e^x + x] = e$, 若不等式 $f(x) + f'(x) \geq ax$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, e-2]$ B. $(-\infty, e-1]$ C. $(-\infty, 2e-3]$ D. $(-\infty, 2e-1]$

二、多选题

9. 某学校为了调查学生在一周生活方面的支出情况, 抽出了一个容量为 n 的样本, 其频率分布直方图如图所示, 其中支出在 $[50, 60)$ 元的学生有 60 人, 则下列说法正确的是 ()

- A. 样本中支出在 $[50, 60)$ 元的频率为 0.03
B. 样本中支出不少于 40 元的人数为 132
C. n 的值为 200
D. 若该校有 2000 名学生, 则定有 600 人支出在 $[50, 60)$ 元



10. 已知集合 $M = \{(x, y) | y = f(x)\}$, 若对于 $\forall (x_1, y_1) \in M, \exists (x_2, y_2) \in M$, 使得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ 成立, 则称集合 M 是“互垂点集”. 给出下列四个集

合: $M_1 = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}; M_2 = \{(x, y) | y = \sqrt{x+1}\}; M_3 = \{(x, y) | y = e^x\};$

$M_4 = \{(x, y) | y = \sin x + 1\}$. 其中是“互垂点集”集合的为 ()

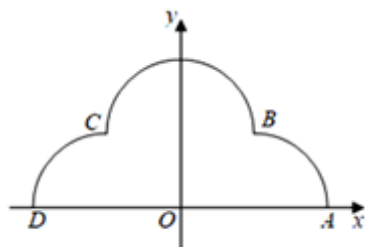
- A. M_1 B. M_2 C. M_3 D. M_4

11. 已知 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x - 1 (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π , 则下列说法正确的有 ()

- A. $\omega = 2$
B. 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上为增函数
C. 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴
D. $(\frac{5}{12}\pi, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心

12. 如图 $A(2, 0), B(1, 1), C(-1, 1), D(-2, 0)$, CD 是以 OD 为直径的圆上一段圆弧, CB 是以 BC 为直径的圆上一段圆弧, BA 是以 OA 为直径的圆上一段圆弧, 三段弧构成曲线 W . 则下述正确的是 ()

- A. 曲线 W 与 x 轴围成的面积等于 2π ;
B. 曲线 W 上有 5 个整点 (横纵坐标均为整数的点);
C. CB 所在圆的方程为: $x^2 + (y-1)^2 = 1$;
D. CB 与 BA 的公切线方程为: $x + y = \sqrt{2} + 1$.



三、填空题

13. 命题“ $\forall x \in N, x^2 > 1$ ”的否定为_____.

14. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = -6$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x + 2|, & x \in [-4, 0] \\ 2f(x - 4), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$, 则 $f(6) =$ _____; 若方程 $f(x) = x + a$ 在区间 $[-4, 8]$ 有三个不等实根, 实数 a 的取值范围为 _____.

16. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $\triangle PAD$ 为等边三角形, 若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积与四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积大小之比为 $\frac{\sqrt{3}}{7\pi}$, 则四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积为 _____.

四、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 若 $2S + \sqrt{3}bc \cos A = 0$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 若 $a = \sqrt{39}, b - c = 3$, 求 b, c 的值.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2^{n+1} - 2 (n \in N_+)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

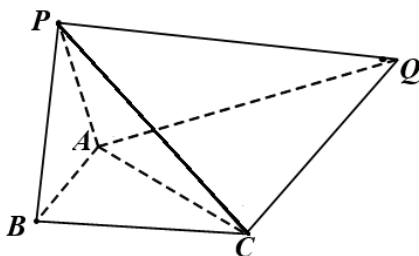
(2) 设 $b_n = \log_2 a_n^2$, 求数列 $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , P, Q 在平面 ABC 的同侧, 二面角 $Q-AC-B$ 的平面角为钝角,

Q 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{6}$, $\triangle PAB$ 是边长为 2 的正三角形, $BC = 4$, $AQ = CQ = 2\sqrt{3}$, $\angle ACB = 30^\circ$.

(1) 求证: 面 $PAC \perp$ 平面 PAB ;

(2) 求二面角 $P-AC-Q$ 的平面角的余弦值.



20. 为了拓展城市的旅游业，实现不同市区间的物资交流，政府决定在 A 市与 B 市之间建一条直达公路，中间设有至少 8 个的偶数个十字路口，记为 $2m$ ，现规划在每个路口处种植一颗杨树或者木棉树，且种植每种树木的概率均为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 现征求两市居民的种植意见，看看哪一种植物更受欢迎，得到的数据如下所示：

	A 市居民	B 市居民
喜欢杨树	300	200
喜欢木棉树	250	250

是否有 99.9% 的把握认为喜欢树木的种类与居民所在的城市具有相关性；

(2) 若从所有的路口中随机抽取 4 个路口，恰有 X 个路口种植杨树，求 X 的分布列以及数学期望；

(3) 在所有的路口种植完成后，选取 3 个种植同一种树的路口，记总的选取方法数为 M ，求证： $3M \geq m(m-1)(m-2)$ 。

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

21. 已知椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$. 直线 l: $y = x + m$ 与

y 轴交于点 P，与椭圆交于 M, N 两点.

- (1) 求椭圆 E 的标准方程；
- (2) 若 $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{PN}$ ，求实数 m 的值.

22. 已知函数 $f(x) = (ax - \sin x - 1) \cdot e^x (a \in \mathbf{R})$ ， $f'(x)$ 是其导函数.

- (1) 当 $a = 1$ 时，求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程；
- (2) 若 $a \geq 1$ ，证明： $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内至多有 1 个零点.