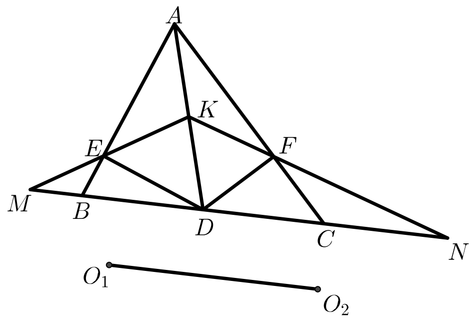
第十四届中国东南地区数学奥林匹克

高二年级　　第一天

题 1　如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, K 是中线 AD 的中点, $DE \perp AB$ 于 E, $DF \perp AC$ 于 F, 直线 KE, KF 分别与直线 BC 相交于点 M, N, $\triangle DEM, \triangle DFN$ 的外心分别为 O_1, O_2. 证明: $O_1O_2 \parallel BC$.



题 2　设 $x_i \in \{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$, 若函数 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的值只取 0 或 1, 则称 f 是一个 n 元布尔函数, 并记

$$D_n(f)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\}$$

(1) 求 n 元布尔函数的个数;

(2) 设 g 是 n 元布尔函数, 满足

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n) \equiv 1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\cdots+x_1x_2\cdots x_n \pmod 2$$

求集合 $D_n(g)$ 的元素个数, 并求最大的正整数 n, 使得

$$\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D_n(g)}(x_1+x_2+\cdots+x_n)<2017$$

题 3　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 为正实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i \cdot \sum_{i=1}^{n}a_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})$$

题 4　对于任意正整数 n, 记 D_n 为 n 的正约数全体, $f_i(n)$ 为集合

$$F_i(n)=\{a \in D_n | a \equiv i \pmod 4\}$$

的元素个数, 其中 $i=0,1,2,3$. 求最小的正整数 m, 使得 $f_0(m)+f_1(m)-f_2(m)-f_3(m)=2017$.