通过数学实验教学落实高中数学建模核心素养

黄高湧

（龙湾区教师发展中心 325024）

《普通高中数学课程标准(2017年版)》将"把握数学本质,启发思考,改进教学"作为数学课程的基本理念之一,要求数学教学从数学问题的本质出发,通过适当的教学设计促进学生对知识的理解掌握.另一方面,基于创建高中实验教学的目标,借助于数学实验这一较为开放的载体,能够更好地进行课堂教学设计以体现促进学生研究、创新的育人要求.

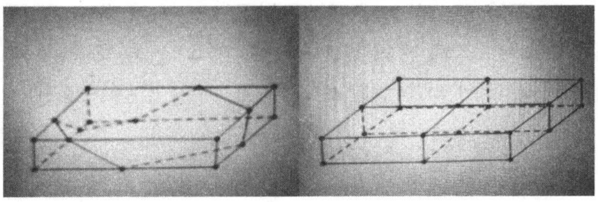
1 落实数学核心素养的数学实验教学

高中数学总是给学生一种复杂无用、枯燥乏味的印象,高强度的抽象性和知识量使得学生在学习中遇到较大阻碍,从而很难对概念本质进行理解,将所学知识进行串联和融会贯通,作为数学实验教学的首要任务,即将所学知识点与现实世界的联系进行深入剖析,拉近数学与学生的距离,将其去抽象性,体现"应用"二字,因此数学实验教学以"数学实验"的形式为载体,意在帮助学生更好地理解课本知识.

高中数学实验教学可从广义和狭义两个角度理解,广义上的数学实验即在数学的背景下,经历设置情境或提出问题,问题理解和转化,动手实践验证再到解决问题的一系列过程达到应用数学知识和技能,强化知识理解,提升思维训练的目的,实验教学过程中学生经历的过程需被强调和重视.而狭义上,数学实验需关注实验的模式,包括动手制作、数学软件学习,问题的探究、验证性实验的设计和实施等.对高中学生而言,数学实验应是依附于日常学习的,课本知识的拓展与深入也应是抽象概念和问题的具体验证和实现.为此数学实验教学尝试挖掘数学教材、课外辅导和拓展材料、数学试题等资源中能够用于动手操作、小组讨论或数学建模的相关内容,进行递进的、有层次的安排和设计,在实验教学中加入基础数学课来不及或没有条件提及的内容,是基础课内容的深入、拓展、引申等.这一点也充分体现了数学实验教学落实数学核心素养的理念.

2 数学实验"包装彩绳问题"教学内容

"包装彩绳问题"选自《普通高中数学课程标准(2017年版)》的附录2教学与评价案例,属于对数学建模素养评价不同水平表现的一个案例.内容包括购买礼盒的生活场景,售货员的捆扎方式,以及他提出这样的捆扎不仅漂亮而且比一般的十字捆扎包装更节省彩绳.(如图)



这是立体几何中线段长度问题,往往需要借助直观才能论证的问题,学生对售货员观点验证的两种处理方法反映数学建模素养的不同水平;方法一:如果学生能够结合几个具体的长方体盒子,通过捆扎操作,测量比较的方法,得到针对这几个盒子的结论,并且能够通过归纳提出一般长方体盒子情况下的猜想,即使不能给出证明,可以认为达到数学建模水平一的要求;方法二:如果学生能够用字母表示各段绳长,将长方体盒子平面展开,把问题转化为平面上折线长度的比较,把"扎紧"的表述转化为两点间直线段,最后给出一般性的结论,可以认为达到数学建模水平二的要求,最后内容就是具体数学化的解决问题过程.建模素养水平一基本会达到,关键是培养学生达到建模素养水平二,甚至突破到建模素养水平三是教学的重点也是要突破的难点.与传统的高中数学学习的内容相比,数学建模的课例研究比较少,学习资源相对匮乏,师生都感到生疏,但它在新的

高中数学课程中的位置，在数学核心素养培养过程中都显得十分特别和重要. 新教材增加了数学建模具体内容以及课时，不仅让学生体验数学建模一般过程，也是培养学生数学建模核心素养的重要途径.

3　数学实验教学提升核心素养解析

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题，用数学方法构建模型解决问题的素养.

数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题、分析问题、建立模型、确定参数、计算求解、检验结果、改进模型最终解决实际问题. 数学模型搭建了数学与外部世界联系的桥梁，是数学应用的重要形式. 数学建模是应用数学解决实际问题的基本手段，也是推动数学发展的动力. 数学建模主要表现为：发现和提出问题，建立和求解模型，检验和完善模型，发现和解决问题.

通过高中数学实验教学使学生能有意识地用数学语言表达现实世界，发现和提出问题，感悟数学与现实之间的关联，学会用数学模型解决实际问题，积累数学实验的经验，认识数学模型在科学、社会、工程技术诸多领域的作用，提升实践能力，增强创新意识和科学精神. 数学建模是一种独立的数学素养，又是一种综合程度很高的素养，因为建模的过程离不开数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数据分析. 它打破数学知识内部严密的知识体系和技能体系的界限，强调以学生的经验、学习实际和社会需要的问题为核心，以问题求解的需要为导向，对学生学过的数学学科内部和跨学科的知识工具、方法、资源进行整合应用，有效地培养和发展学生解决问题的能力、探究精神和实践能力.

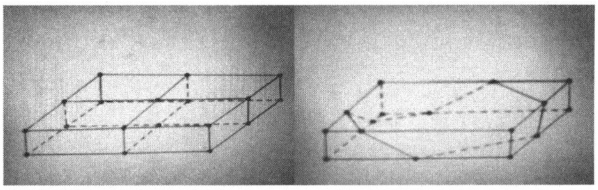
4　数学实验"包装彩绳问题"教学设计

(1)教学基本流程

实际问题→数学问题→数学模型→求解模型→检验模型→模型应用

(2)留意身边的数学问题

问题 1　买一份精美的礼物，售货员用"彩绳"对礼盒做了两种方式"捆扎"，如图，请问你熟悉这两种捆扎方式吗？测量这两种捆扎方式的彩绳长度并进行比较.



设计意图　①让学生感知生活中实际问题，数学建模的核心是来源于生活，又用数学思想方法解决问题，最终回归现实生活. ②数学实验活动中非常重要的过程就是学生动手实践，通过动手捆扎礼盒亲身体会并测量两种捆扎的绳长，让学生通过实验捆扎探究彩绳长度问题更加直观地感受空间的彩绳，只有直观上的充分认识才能建立合理的空间想象，从而为建立数学模型做好铺垫. 同时获得数据为引出问题、归纳、猜想做好材料准备. ③学会收集生活中的数据信息，并学会用数学思维去分析数据，获得数学问题，通过设问将特殊长方体的结论推广到一般长方体，使得问题更加数学化.

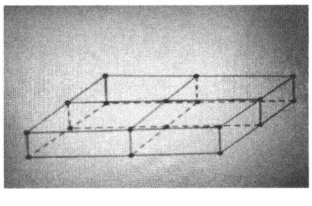
(3)将包装彩绳问题转化为数学问题

问题 2　对任意一个长方体礼盒，同一组对面上的"对角"捆扎和"十字"捆扎哪一种捆扎用绳更短？

设计意图　数据从实验中来，而且对于任意一个长方体已经不是全部实验能够完成的，必须经过数学严格的证明，从而把社会问题转化为数学问题，这里最核心的就是用数学语言表示问题，也就是要建立数学模型.

(4)建立立体几何的数学模型

问题 3　设长方体长、宽、高分别为 x, y, z，且 $z \leqslant x, z \leqslant y$，设十字捆扎最短绳长为 L，求绳长 L.



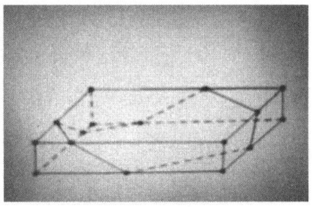
十字捆扎方式的"最短"绳长(扎紧绳子再也抽不动) $L=2x+2y+4z$.

思考：十字捆扎方式的十字打在另外两组对面上的捆扎方式，参数如何变化，最短绳长是多少？在 z 最小的情况下，哪一组对面上的捆扎方

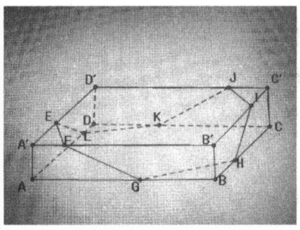
式绳长最短？

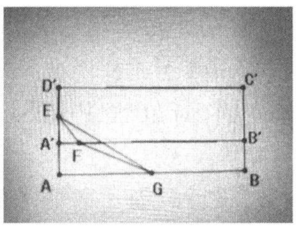
设计意图 （1）最短的直观感知转化为数学理解，为求解绳长做基础.（2）不同组对面的捆扎方式的绳长，为了引导学生思考参数改变对结果的影响.

问题 4 设长方体长、宽、高分别为 x,y,z，且 $z\leqslant x,z\leqslant y$，设对角捆扎的最短绳长 M，求绳长 M.



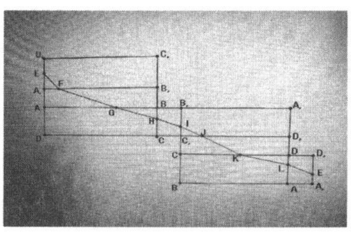
问题 5 如图，如果固定 E,G 两点，那么动点 F 在 $A'B'$ 的何处时 $EF+FG$ 最短.（展平后 E,F,G 三点共线时，两点间线段最短（两边之和大于第三边））.





设计意图 这是教学的难点也是重点，如何突破难点是关键. 利用学生原有的直观认知深度分析“相邻”两个面的展平后能够得到“2 条”线段，如何使“2 条”线段最短，那就是通过直观经验两点间线段最短，通过实际的直观感知彩绳最终是一条的，而常规六个面的展开是分散的 3 条折线，那么如何处理？进而引导学生直观展开的思维提升，每“相邻”两个面的展开能够得到“2 条”相连的线段，最终实现 8 条线段沿着交线相邻两个面的连续展开，突破难点，从而提升学生直观想象能力.

方法 1



$$M=\sqrt{(2x+2z)^2+(2y+2z)^2},$$

$$L=2x+2y+4z,$$

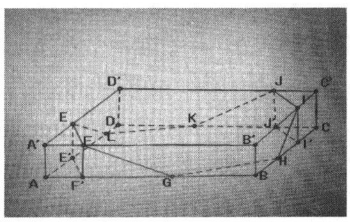
用换元两边平方可得 $M<L$.

设计意图 方法 1 中引导学生将 8 条线段拼接一起，相邻两个平面沿着交线连续展开可以实现 8 条拼接一起，实现难点的突破，学生自然而然想到的是通过勾股定理求得 M 的长度. 也有学生展开了其中 4 个面而停滞不前，可能是再展开则上底面用了两次，与学生原来的认知（长方体展开图是六个面，每个面用一次）是矛盾的，首先肯定他的想法是好的，已经从 2 条线段突破到了 4 条线段，再次总结引导他的想法通过相邻的线段在同一平面内，继续把平面按相邻两个面沿着交线展开，从而解决问题，也是培养学生勇于大胆尝试，不断进取的数学精神.

问题 6 最短绳子与点 E 在棱 $A'D'$ 上的位置有关吗？点 E 在棱 $A'D'$ 上任意位置都可以吗？

设计意图 在求得绳子长后进一步研究 E 点位置与绳长关系，从而确定对角扎紧情况下，最短绳长是一样的. 以及 E 点要控制在一定范围，否则就无法实现对角在底面的捆扎，让学生体会数学建模从实践中来回到实践中去.

方法 2



两边之和大于第三边：

$EF<EA'+A'F,FG<FF'+F'G,$

$GH<GB+BH,HI<HI'+I'I,$

$IJ<IC'+C'J,JK<JJ'+J'K,$

$KL<KD+DL,LE<LE'+E'E,$

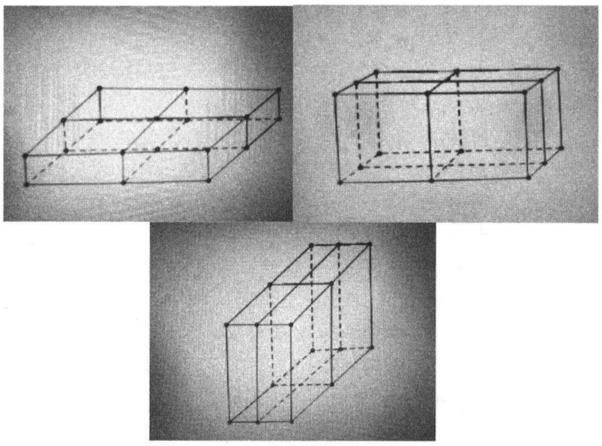
所以 $EF+FG+GH+HI+IJ+JK+KL+LE<2x+2y+4z$，即 $M<L$.

设计意图 将对角捆扎每一线段都构成直角三角形，目的是将直角三角形的边长与长方形的长宽高联系起来，其所有直角边之和就是 L 长度. 或将每一线段看成向量进行正交分解，所有分

解后的向量同向之和的模就是 $2x+2z$ 与 $2y+2z$，从而两边之和大于第三边. 在数学建模的求解模型中，不断激发学生思考动力，运用各种所学知识达到建模，促进数学知识、能力的灵活运用.

问题 7 “十字捆扎”的十字分别打在不同的面上有 3 种捆扎方式，哪一种绳长最短？能给出判断标准吗？“对角捆扎”的对角分别打在不同的面上有 3 种捆扎方式，哪一种绳长最短？能给出判断标准吗？

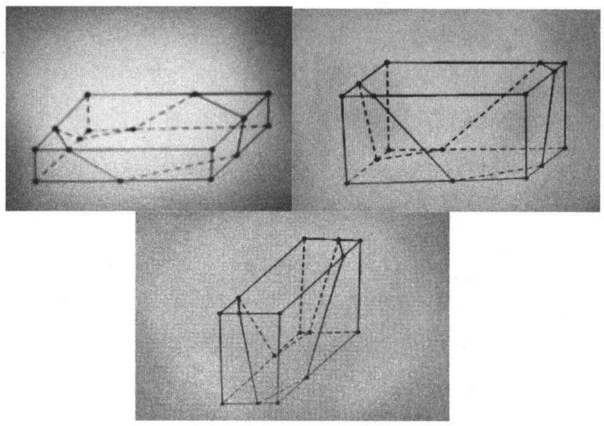
分析 (1)“十字捆扎”的十字分别打在不同的面上有 3 种捆扎方式：



$L_1=2x+2y+4z$，$L_2=2x+2z+4y$，

$L_3=2y+2z+4x$.

(2)“对角捆扎”的对角分别打在不同的面上有 3 种捆扎方式：



$$M_1=\sqrt{(2x+2z)^2+(2y+2z)^2},$$

$$M_2=\sqrt{(2x+2y)^2+(2z+2y)^2},$$

$$M_3=\sqrt{(2y+2x)^2+(2z+2x)^2}.$$

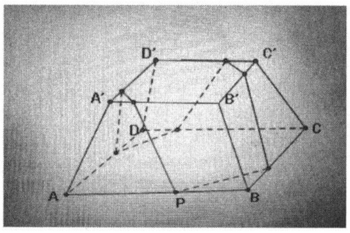
结论 当 $z\leqslant x$，$z\leqslant y$ 时，即 z 最小时，“十字捆扎”的十字打在含 x，y 面上时绳子最短. 在 z 最小时，“对角捆扎”的对角打在含 x，y 面上时，绳子最短. 在 z 最小时，在含 x，y 面上的“对角”捆扎方式绳子最短.

设计意图 该问题的实验教学中，在十字捆扎和对角捆扎分别求出绳长时，也可以插入让学生思考探究，让学生感受数学模型中参数的变化对模型的影响，本模型中本质是 x，y，z 互换，为后面模型应用做好求解策略的铺垫，提高解决问题的效率.

(5)深入探究

探究 1 将 10 个相同的长方体礼盒，用彩纸按“规则打包”的形式将 10 个礼盒打包成一个长方体的大包，问怎样打包使用彩纸最少？(礼盒长 20cm，宽 10cm，高 5cm，包内物体都是全等长方体，且相邻两物体必须以全等侧面对接，打包后的结果仍是一个长方体)

探究 2 用对角捆扎方式给如图正四棱台进行捆扎，点 P 在线段 AB 上，且 $PB=1$，当彩绳扎紧四棱台且经过 P 点时，求此时彩绳的长度.



设计意图 立体几何模型的深化应用，主要是让学生再次运用求解模型的数学思想方法，解决立体几何中的线段问题，学生已经有所熟悉，将线段长度问题拓展到面积问题具有挑战性，同时新的问题需要重新数学建模的一般过程，学生会更加熟悉数学建模的一般流程，提升学生数学建模水平.

5 实验教学实践反思

5.1 学生实验表现及反馈

数学实验的核心需要学生主动学数学、用数学，积极参与数学建模中的动手实验环节，在体验中感知，在体验中发现问题，提出问题、分析问题，并在建立模型与求解模型中自主独立思考解决问题，给学生自己运用所学的数学知识、方法、思想解决问题的锻炼.

数学建模要用真实情境，让学生体验到数学来源于生活，认识到知识和技能在未来的学习和生活中的价值，从而在数学与问题情境的有效互动中激发学习数学的兴趣，提升了学生的数学核心素养，培养了学生用数学建模解决实际问题能力.

学生主动学习并不是漫无目的的，需要教师精心设置问题进行引导，如由彩绳长度的测量出发，归纳出结论，通过建立数学模型，求解模型使得实际问题得以解决，其中难点就在于对角捆扎彩绳长度的求法，先设置问题解决2条线段问题，进而推广到8条甚至n条线段.

数学实验活动环节学生相对陌生，此时需要教师多多鼓励，学生只有参与其中亲身感知，才能获得数学“源”与“流”的过程；面对求解模型环节，学生想法会比较多，既要展示教学设计方案，也要尊重学生，让学生充分展示其得到求解模型的方法，在其基础上引导并解决问题；还要关注其解决不了的问题在哪里，教师为学生寻找摆脱困境的方法，让学生在课堂中有成就感，形成积极活跃的课堂氛围并让学生逐步具备知难而上的探究精神.

5.2 数学实验教学的思考

通过数学实验教学的内容，激发学生对数学建模的兴趣，引导学生进行深入探究和动手实验，学生的探究实验过程有较高的自由度，教师仅起到观察和引导的作用.在探究和实验过程中对有困难的学生，建议以小组讨论的形式相互指导，实验教学希望学生经历“发现问题→实际问题→探究尝试→形成方案→解决问题”这样一个现实问题解决的过程，同时也将“现实问题→现实模型建立→数学模型建立→数学问题解决→结论返回现实”整个数学建模过程融入其中.数学实验教学内容取材力求从学生熟悉的内容入手进行探究和设计，进而回馈学生的数学知识认知体系，同时教学内容的设计也尽可能将学生所学的数学知识与现实相联系.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:4.14
[2]刘卫锋,何霞,王尚志.高中数学建模中教师问题初探[J].数学通报,2007(10):13-16
[3]张思明.理解数学:中学数学建模课程的实践案例与探索[M].福州:福建教育出版社,2011:50
[4]张思明,胡风娟,王尚志.数学建模从走近到走进数学课堂[J].数学教育学报,2017,26(6):10-13
[5]李明振,喻平.高中数学建模课程实施的背景、问题与对策[J].数学通报,2008,47(11):8-10
[6]黄英芬,颜宝平,龙红兰.从应用题到建模的回译[J].数学通报,2019,58(9):34-37
[7]童永健.深挖课本 深入探究 深度理解[J].中学教研(数学).2019(11):21-24

(上接第39页)

3.3 评价成为学习的催化剂

首先，探究式的课堂教学应该是在教师的引导下，以问题串为主线，通过有效的提问驱动学生的思维，学生在探索过程中，或“发现”结论，或探索失败，这都是正常的现象.在这一过程中，教师要给予及时的点评与反馈，并且不断地关注学生的思维动态，进行持续性的评价，可以推动学生不断的进行反思.评价既要关注学生学习的结果，更要重视学生学习的过程.通过评价，提高学生学习兴趣，帮助学生认识自我，从而实现学生对整个学习过程的反思.因此，师生在一起探索过程中，教师的评价不仅有利于鼓励学生探索问题的积极性，而且更能够促进学生进行深入思考.

4 结束语

探究性的学习活动是学生成就自我的学习，是学生对知识渴求的一种内驱力，体现的是学生的主体性，教师在其中的引领作用不可或缺.在基于问题导向的探究式的数学教学活动中，教师的引导、启发和评价是为了促进学生的感知、体验和参与，促进学生的反思和探索，从而促进学生数学理性思维的发展，促进学生学科核心思维的养成，促进学生学会学习.这其实就是数学教学的魅力所在.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017版)[M].北京:人民教育出版社,2018
[2]国务院办公厅.关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见.国办发[2019]29号 http://www.gov.cn/zhengce/content/2019-06/19/content_5401568.htm
[3]陈德燕.基于情境、问题导向的探究体验式课堂教学实践[J].数学通报,2020,59(4):35-38
[4]人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书(A版):数学(选修4-2矩阵与变换)[M].北京:人民教育出版社,2006