相对运动在图形变换中的巧用

姚　军　许　婷　(江苏省高邮市甘垛镇澄阳初级中学　225635)

图形变换问题是近年各类考试的热点问题.当一个点、一条线或一个面带动整个图形发生变换时,很多学生感觉无法想象.实际上,利用相对运动观点,转换变化过程中的动与静,可以有效降低动态问题的难度,达到解决问题的目的.本文从平移、翻折(轴对称)、旋转这三种常见的图形变换问题入手,体现巧用相对运动解题的优势.

1　问题呈现

1.1　平移中的相对运动

问题 **1**　在平面直角坐标系 xOy 中,动点 $M(-a,\sqrt{3}a)$ 在第二象限,动点 $N(0,h)$ 在 y 轴正半轴上.当 $MN=8$ 时,$\triangle MON$ 的最大面积为 _____.

分析　根据 $M(-a,\sqrt{3}a)$ 的横、纵坐标之间的关系可以确定点 M 在直线 $y=-\sqrt{3}x(x<0)$ 上运动,点 N 在 y 轴正半轴上.虽然题目中已告知了线段 MN 的长,要求 $\triangle MON$ 的最大面积还需要知道线段 MN 上的高的最大值,但随着 M,N 两点的平移运动,线段 MN 上的高的最大位置无法确定.这是本题的难点,学生束手无策,思维无法继续.

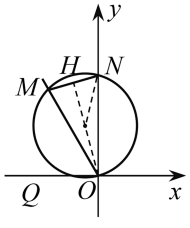

图 1

观察图形中的几何元素,可以发现点 M 和点 N 都相对于点 O 运动,因此可以先将点 M 与点 N 视作相对静止,让点 O 相对点 M 和点 N 进行运动,这个问题就迎刃而解了.如图 1,由点 M 在直线 $y=-\sqrt{3}x$ $(x<0)$ 上运动,可得 $\angle MOQ=60°$,则 $\angle MON=30°$.又 $MN=8$,所以点 O 相对于 M,N 运动的轨迹为圆,即 $\triangle MON$ 为圆的内接三角形.当点 O 位于线段 MN 的垂直平分线上时,$\triangle MON$ 的面积最大.根据圆的有关知识可求出线段 MN 上的高 OH 最大为 $4\sqrt{3}+8$,即 $\triangle MON$ 的最大面积为 $16\sqrt{3}+32$.

1.2　翻折中的相对运动

问题 **2**　如图 2,在菱形 $ABCD$ 中,$AC=6\sqrt{2}$,$BD=6$,E 是 BC 边的中点,P,M 分别是 AC,AB 上的动点,连结 PE,PM,则 $PE+PM$ 的最小值是 _____.

分析　题目中点 P,M 为动点,点 E 为定点,点 P,M 相对于点 E 运动过程中 $PE+PM$ 如何才能最小?学生在思考中会根据已有的经验,让点 P,M,E 在一条直线上时,可得 $PE+PM$ 最小,但在运动过程中点 P,M,E 无法运动到一条直线上,此时学生又无从下笔了.

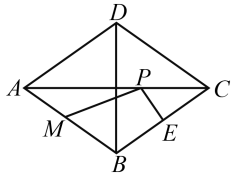

图 2

如图 3,如果我们将点 E 看成相对于点 P,M 运动,利用菱形的性质,不防通过翻折将 PE 转化为 PE',此时点 P,M,E 可在一条直线上了,从而只要 $E'M\perp AB$ 时,$PE+PM$ 最小.

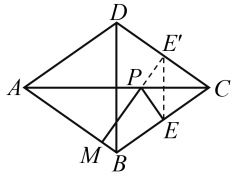

图 3

解　如图 3,作点 E 关于 AC 的对称点 E',过点 E' 作 $E'M\perp AB$ 于点 M,交 AC 于点 P,则点 P,M 即为使 $PE+PM$ 取得最小值时的位置(读者自证),此时 $PE+PM=PE'+PM=E'M$.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以点 E' 在 CD 上.又 $AC=6\sqrt{2}$,$BD=6$,故 $AB=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+3^2}=3\sqrt{3}$.由 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AB\cdot E'M$,得 $\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 6=3\sqrt{3}\cdot E'M$,解得 $E'M=2\sqrt{6}$,即 $PE+PM$ 的最小值是 $2\sqrt{6}$.

1.3　旋转中的相对运动

问题 **3**　如图 4,已知 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=BC=6$,点 D 在 AB 边的延长线上,且 $CD=AB$,将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针旋转 $\alpha(0°<\alpha<360°)$ 得到 $\triangle A'CD'$,若点 M 为 AC 的中点,点 N 为线段 $A'D'$ 上任意一点,则在旋转过程中线段 MN 长度的取值范围为 _____.

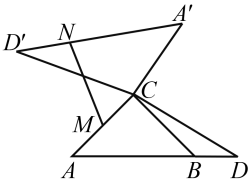

图 4

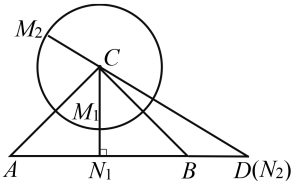

图 5

分析　点 M 为定点,点 N 为动点,点 N 随着 $\triangle A'CD'$ 的旋转而旋转,点 N 相对于点 M 是在一个动圆中运动,圆的半径是在不断变化的,也就是它到点 M 的距离是不断变化的.这个距离什么时候最大,什么时候最小,是本题的一个难点.很多学生的

万方数据

直观想象能力不足,因此很难把握 MN 长度的取值范围.

如果我们将 $\triangle ACD$ 视作不动,那么点 N 始终落在线段 AD 上,让点 M 相对于点 N 在运动,而点 M 到点 C 的距离不变,点 M 运动的轨迹是以点 C 为圆心、线段 CM 的长为半径的圆.如图 5,当 $CN_1 \perp AD$,交圆 C 于点 M_1,此时线段 M_1N_1 长度最短;当点 N_2 与点 D 重合,延长 DC 交圆于点 M_2,此时 M_2N_2 最长.根据直角三角形有关知识解出 $CN_1=3\sqrt{2}$,$CN_2=6\sqrt{2}$,$CM=3$,即 MN 长度的取值范围为 $[3\sqrt{2}-3,6\sqrt{2}+3]$.

问题 **4** 如图 6,已知抛物线的顶点坐标为 $(0,1)$,且经过点 $A(1,2)$,直线 $y=3x-4\sqrt{2}$ 经过点 $B(2\sqrt{2},n)$,与 y 轴交于点 C.将该抛物线绕原点 O 顺时针旋转 $45°$ 得到新曲线,新曲线与直线 BC 交于点 M,N,点 M 在点 N 的上方,则点 N 的坐标为 _____.

分析 根据已有条件学生能很快求出点 B 的坐标及抛物线的解析式.而所求点 N 的坐标恰好是旋转后的抛物线与直线 BC 的一个交点的坐标,通过方程组即可解出,但问题在于学生不知如何求旋转后抛物线的解析式.此时教师可引导学生运用"相对运动"的思想,将抛物线不动,直线 BC 绕着原点逆时针旋转 $45°$ 后与原抛物线相交于点 M',N',最后再将点 N' 绕着原点顺时针旋转 $45°$ 即可求出点 N 的坐标.

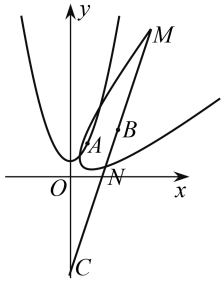

图 6

解 由题意设抛物线为 $y=ax^2+1(a\neq 0)$,将点 $A(1,2)$ 代入解得 $a=1$,故抛物线的解析式为 $y=x^2+1$.将点 $B(2\sqrt{2},n)$ 代入直线 BC 中,解得 $n=2\sqrt{2}$,故点 B 的坐标 $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.在 BC 的方程中令 $x=0$,解得 $y=-4\sqrt{2}$,故点 C 的坐标中 $(0,-4\sqrt{2})$.将点 B,C 绕着原点逆时针旋转 $45°$ 可得点 $B'(0,4)$,$C'(4,-4)$,故旋转后的直线 $B'C'$ 解析式为 $y=-2x+4$.

令 $x^2+1=-2x+4$,解得 $x_1=1$,$x_2=-3$,故 $y_1=2$,$y_2=10$,即点 $N'(1,2)$,点 $M'(-3,10)$.将点 $N'(1,2)$ 绕着原点顺时针旋转 $45°$ 即可得点 N,则 $ON=ON'$.由点 N 在 BC 上,可设点 $N(n,3n-4\sqrt{2})$,由 $n^2+(3n-4\sqrt{2})^2=5$,解得 $n_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,$n_2=\dfrac{9\sqrt{2}}{10}$(不合题意舍去),即点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

通过分析求解这些问题后,我们会发现它们都具有一些类似的特征:直接根据条件给出的图形变换进行求解,问题会变得复杂,求解过程也比较繁琐.我们如果妙用"相对运动",换个思考的角度,让复杂的图形静止下来,让简单的图形相对运动起来,会有一片不一样的天地!妙用"相对运动"的关键是要明确相对运动的过程,运用平移、轴对称和旋转的性质,巧妙根据图形中点运动的相对性,使之达到破解这类问题的目的.

2 感悟反思

2.1 关注解题方法的"再创造"

弗赖登塔尔认为"数学学习的唯一正确方法是让学生进行'再创造',就是说,由学生本人把学习的东西实现或创造出来,教师的任务是为学生的发展创造条件、引导探索"[1].因此,教师应该在平时备课中多留心,精心选题,教学中创设适合学生的宽松的交流氛围,让学生经历问题辨析、相互交流,自主地提出求解的具体策略,自觉回顾所涉及的知识与方法、通性通法和最优方法,悟出数学的本源.鉴于此,在解题教学中,教师应该注重利用学生已有的解题方法同化并顺应新方法,让学生经历解题的发生和生成的过程,使学生的解题潜能得以提升.

2.2 关注知识的生长点

在梳理与整合关于图形变化的知识时,应以学生为知识梳理的主体,让他们自主经历题组解答和互动交流的过程,推动基础知识的有效入网[2].本课例着眼于图形的运动变化,在运动变化中运用"相对运动"的观点思考问题,让学生体会学习运动变换的作用,为学生今后解题提供有力支撑.

在平时的教学中,教师常给学生总结各种几何基本图形,机械化记忆或者训练能够让学生形成条件反射,可是对为什么要这样作辅助线,学生可能并没有理解.基于对知识本身的追溯,引导学生如何思考应成为教师教学中的着力点,引导学生通过观察、联想,形成自己的认知经验[3].如果教师能够做到心中有教材,心中有学生,帮助学生在学习过程中梳理好知识脉络,形成知识体系,打通各个知识板块中的关联,多引导学生思考问题的本源,就可以提高学生在数学课堂中的成就感,为学生的知识生长助一臂之力.

参考文献

[1] 涂荣豹.数学教学设计原理的构建——教学生学会思考[M].北京:科学出版社,2018.

[2] 孙来扣.中考复习,从"起点"再出发——以"一次方程(组)"复习为例[J].中学数学,2015(12):39-41.

[3] 李健.妙用相对运动 巧解动态问题[J].初中数学教与学,2019(11):35-37.

万方数据