江苏省仪征中学 2018~2019 学年第二学情期末复习讲义（附加）1

1.由下列不等式：$1>\frac{1}{2}$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>1$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}>\frac{3}{2}$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{15}>2$，…，你能得到一个怎样的一般不等式？并加以证明．

解：一般结论：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$．证明如下：

① 当 $n=1$ 时，由题设条件知命题成立．

② 假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，猜想正确．

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}$.

当 $n=k+1$ 时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$

$>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{k}{2}+\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{k+1}{2}$.

∴ 当 $n=k+1$ 时，不等式成立．

根据①②可知，对 $n\in\mathbf{N}^*$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$.

2.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=1$，$AP=AD=2$.

（1）求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值；

（2）若点 M，N 分别在 AB，PC 上，且 $MN\perp$ 平面 PCD，试确定点 M，N 的位置．

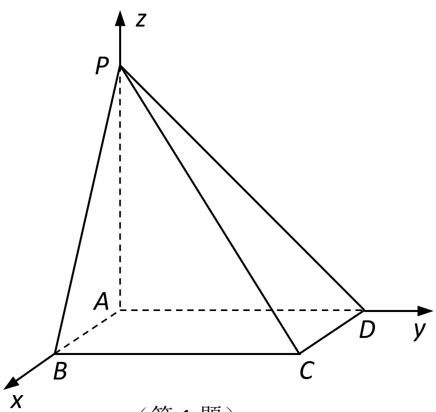
【解】（1）由题意知，AB，AD，AP 两两垂直．

以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则

$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$．

从而 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$．

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，



（第 1 题）

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+2y-2z=0,\\ 2y-2z=0,\end{cases}$

不妨取$y=1$，则$x=0$，$z=1$.

所以平面 *PCD* 的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. ……………………………3 分

设直线 *PB* 与平面 *PCD* 所成角为θ，所以$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

即直线 *PB* 与平面 *PCD* 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. …………………………5 分

（2）设$M(a,0,0)$，则$\overrightarrow{MA}=(-a,0,0)$，

设$\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PC}$，则$\overrightarrow{PN}=(\lambda,\ 2\lambda,\ -2\lambda)$，而$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=(\lambda-a,2\lambda,2-2\lambda)$. …………………………8 分

由（1）知，平面 *PCD* 的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ ，

因为$MN\perp$平面 *PCD*，所以$\overrightarrow{MN}\ /\!/\ \boldsymbol{n}$.

所以$\begin{cases}\lambda-a=0,\\ 2\lambda=2-2\lambda,\end{cases}$ 解得，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{1}{2}$.

所以 *M* 为 *AB* 的中点，*N* 为 *PC* 的中点. ………………………………10 分

3.已知一口袋中共有 4 只白球和 2 只红球

（1）从口袋中一次任取 4 只球，取到一只白球得 1 分，取到一只红球得 2 分，设得分为随机变量 X，求 X 的分布列与数学期望；

（2）从口袋中每次取一球，取后放回，直到连续出现两次白球就停止取球，求 6 次取球后恰好被停止的概率.

3.解：（1）X 的可能取值为 4、5、6.

P(X=4)= $\dfrac{C_4^4}{C_6^4}=\dfrac{1}{15}$　　P(X=5)= $\dfrac{C_4^3C_2^1}{C_6^4}=\dfrac{8}{15}$　　P(X=6)= $\dfrac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\dfrac{6}{15}$

$\therefore$ X 的分布列为

P	4	5	6
X	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

$\therefore\ E(X)=4\times\frac{1}{15}+5\times\frac{8}{15}+6\times\frac{6}{15}=\frac{16}{3}$ 5 分

(2)设 “6 次取球后恰好被停止”为事件 A

则 $P(A)=[(\frac{1}{3})^3+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_3^2(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}]\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{44}{729}$

$\therefore$ 6 次取球后恰好被停止的概率为 $\frac{44}{729}$ 10 分

4. 设 $n\in N^+$ 且 $n\geq 4$, 集合 $M=\{1,2,3,\cdots,\ n\}$ 的所有 3 个元素的子集个数为 N，这些子集记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{N.}$

(1) 当 $n=4$ 时，求集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{N.}$ 中所有元素这和 $S.$

(2) 记 m_i 为 $A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 中最小元素与最大元素之和，记 $f(n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i}{N}$, 求 $f(n)$ 的表达式.

23.解：（1）因为含元素 1 的子集有 C_3^2 个，同理含 2, 3, 4 的子集也各有 C_3^2 个，于

素之和为 $(1+2+3+4)\times\mathrm{C}_3^2=30$.

（2）集合 $M=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有 3 个元素的子集中：

以 1 为最小元素的子集有 C_{n-1}^2 个，以 n 为最大元素的子集有 C_{n-1}^2 个；

以 2 为最小元素的子集有 C_{n-2}^2 个，以 $n-1$ 为最大元素的子集有 C_{n-2}^2 个；

…

以 $n-2$ 为最小元素的子集有 C_2^2 个，以 3 为最大元素的子集有 C_2^2 个.

$$\therefore \sum_{i=1}^{N} m_i = m_1+m_2+\cdots+m_N=(n+1)(\mathrm{C}_{n-1}^2+\mathrm{C}_{n-2}^2+\cdots+\mathrm{C}_2^2)$$

$$=(n+1)(\mathrm{C}_{n-1}^2+\mathrm{C}_{n-2}^2+\cdots+\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_3^3)=(n+1)(\mathrm{C}_{n-1}^2+\mathrm{C}_{n-2}^2+\cdots+\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_4^3)$$

$$=\cdots=(n+1)N,$$

$$\therefore f(n)=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{N}=n+1.$$