

第二课时 利用导数研究函数的极值、最值

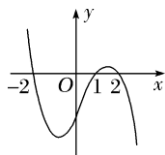
考点分层突破

考点聚焦 · 题型剖析

考点一 利用导数求函数的极值 多维探究

角度1 根据函数图象判断极值

【例1】设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$ ，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是()



- A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$
- B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$
- C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$
- D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

答案 D

解析 由题图可知，当 $x < -2$ 时， $f'(x) > 0$ ；

当 $-2 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $1 < x < 2$ 时， $f'(x) < 0$ ；

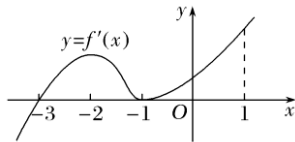
当 $x > 2$ 时， $f'(x) > 0$ 。

由此可以得到函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极大值，

在 $x = 2$ 处取得极小值。

感悟升华 由图象判断函数 $y = f(x)$ 的极值，要抓住两点：(1)由 $y = f'(x)$ 的图象与 x 轴的交点，可得函数 $y = f(x)$ 的可能极值点；(2)由导函数 $y = f'(x)$ 的图象可以看出 $y = f'(x)$ 的值的正负，从而可得函数 $y = f(x)$ 的单调性。两者结合可得极值点。

【训练1】(多选题)(2021·石家庄检测)函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示，则()



- A. -3 是函数 $y = f(x)$ 的极值点
- B. -1 是函数 $y = f(x)$ 的极小值点
- C. $y = f(x)$ 在区间 $(-3, 1)$ 上单调递增
- D. -2 是函数 $y = f(x)$ 的极大值点

答案 AC

解析 根据导函数的图象可知, 当 $x \in (-\infty, -3)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-3, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递减, 在 $(-3, -1)$ 上单调递增, 可知 -3 是函数 $y=f(x)$ 的极值点, 所以 A 正确.

因为函数 $y=f(x)$ 在 $(-3, 1)$ 上单调递增, 可知 -1 不是函数 $y=f(x)$ 的极小值点, -2 也不是函数 $y=f(x)$ 的极大值点, 所以 B 错误, C 正确, D 错误.

角度2 已知函数求极值

【例2】已知函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 在定义域内极值点的个数.

解 (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x$, 函数的定义域为 $(0, +\infty)$ 且 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 2$,

于是当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表.

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\ln 2 - 1$	

故 $f(x)$ 在定义域上的极大值为 $f(x)_{\text{极大值}} = f(2) = \ln 2 - 1$, 无极小值.

(2) 由(1)知, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

则函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时函数在定义域上无极值点;

当 $a > 0$ 时, 若 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$, 则 $f'(x) > 0$,

若 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$, 则 $f'(x) < 0$,

故函数在 $x = \frac{1}{a}$ 处有极大值.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值点,

当 $a > 0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点, 且为 $x=\frac{1}{a}$.

感悟升华 运用导数求函数 $f(x)$ 极值的一般步骤:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域; (2) 求导数 $f'(x)$; (3) 解方程 $f'(x)=0$, 求出函数定义域内的所有根; (4) 列表检验 $f'(x)$ 在 $f'(x)=0$ 的根 x_0 左右两侧值的符号; (5) 求出极值.

【训练 2】 已知函数 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数), 求函数 $f(x)$ 的极值.

解 求导得, $f'(x)=1-\frac{a}{e^x}$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 所以函数 $f(x)$ 无极值.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 得 $e^x=a$, 即 $x=\ln a$,

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值且极小值为 $f(\ln a)=\ln a$, 无极大值.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值 $\ln a$, 无极大值.

角度 3 根据极值求参数的值(范围)

【例 3】 (1) 已知 $x=\frac{1}{e}$ 是函数 $f(x)=x(\ln ax+1)$ 的极值点, 则实数 a 的值为()

A. $\frac{1}{e^2}$

B. $\frac{1}{e}$

C. 1

D. e

(2) (2020 苏州质检) 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+\frac{4}{27}$. 若 $f(x)$ 在 $(a-1, a+3)$ 上存在极大值, 则 a 的取值范围是_____.

答案 (1) B (2) $(-9, 0) \cup (0, 1)$

解析 (1) 因为函数 $f(x)=x(\ln ax+1)$ 有极值点,

所以 $f'(x)=(\ln ax+1)+1=2+\ln ax$.

因为 $x=\frac{1}{e}$ 是函数 $f(x)=x(\ln ax+1)$ 的极值点,

所以 $f'\left(\frac{1}{e}\right)=2+\ln\left(a \cdot \frac{1}{e}\right)=0$.

所以 $\ln\left(a \frac{1}{e}\right) = -2$, 解得 $a = \frac{1}{e}$.

(2) $f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2a}{3}$.

当 $a = 0$ 时, $f(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 无极值, 不合题意.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{2a}{3}$ 处取得极小值, 在 $x = 0$ 处取得极大值,

则 $a - 1 < 0 < a + 3$, 又 $a > 0$, 所以 $0 < a < 1$.

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{2a}{3}$ 处取得极大值, 在 $x = 0$ 处取得极小值,

则 $a - 1 < \frac{2a}{3} < a + 3$, 又 $a < 0$, 所以 $-9 < a < 0$.

所以 a 的取值范围为 $(-9, 0) \cup (0, 1)$.

感悟升华 1. 已知函数极值, 确定函数解析式中的参数时, 要注意: 根据极值点的导数为 0 和极值这两个条件列方程组, 利用待定系数法求解.

2. 导数值为 0 不是此点为极值点的充要条件, 所以用待定系数法求解后必须检验.

【训练 3】 (2021 武汉调研) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - 2k \ln x + kx$, 若 $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点, 则实数 k 的取值范围是_____.

答案 $\left[-\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

解析 $f'(x) = \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{x^4} - \frac{2k}{x} + k = \frac{(e^x + kx^2)(x-2)}{x^3}$.

由题意可得, $x = 2$ 是 $f'(x) = 0$ 唯一的变号零点,

故 $h(x) = e^x + kx^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有变号零点,

令 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$,

当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $g(2) = \frac{e^2}{4}$.

故 $-k \leq \frac{e^2}{4}$, 则 $k \geq -\frac{e^2}{4}$.

考点二 利用导数求函数的最值 师生共研

【例4】(2021 无锡检测)已知函数 $g(x)=\ln x-\frac{1}{8}x^2+b$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最小值为

1, 求 $g(x)$ 在该区间上的最大值.

解 依题意知, $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

因为 $g(x)=\ln x-\frac{1}{8}x^2+b$,

所以对 $g(x)$ 求导, 得 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{4}$

$$=\frac{4-x^2}{4x}=\frac{(2-x)(2+x)}{4x}.$$

当 $x\in(1, 2)$ 时, $g'(x)>0$, 当 $x\in(2, 3)$ 时, $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 在 $[2, 3]$ 上单调递减,

在区间 $[1, 3]$ 上, $g(x)_{\max}=g(2)=\ln 2-\frac{1}{2}+b$.

又 $g(1)=-\frac{1}{8}+b$, $g(3)=\ln 3-\frac{9}{8}+b$,

$g(3)-g(1)=\ln 3-1>0$,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-\frac{1}{8}+b=1$,

解得 $b=\frac{9}{8}$, 所以 $g(2)=\ln 2+\frac{5}{8}$.

于是函数 $g(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值为 $g(2)=\ln 2+\frac{5}{8}$.

感悟升华 1.求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最值时, 在得到极值的基础上, 结合区间端点的函数值 $f(a)$, $f(b)$ 与 $f(x)$ 的各极值进行比较得到函数的最值.

2.若所给的闭区间 $[a, b]$ 含参数, 则需对函数 $f(x)$ 求导, 通过对参数分类讨论, 判断函数的单调性, 从而得到函数 $f(x)$ 的最值.

【训练4】(2020 常州检测)已知函数 $g(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x(a\in\mathbf{R})$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值 $h(a)$.

解 由题意, $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{a}{x} + 2x - (a+2) = \frac{2x^2 - (a+2)x + a}{x} \\&= \frac{(2x-a)(x-1)}{x}.\end{aligned}$$

①当 $\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $a \leq 2$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上为增函数, $h(a) = g(1) = -a - 1$;

②当 $1 < \frac{a}{2} < e$, 即 $2 < a < 2e$ 时, $g(x)$ 在 $\left[1, \frac{a}{2}\right)$ 上为减函数, 在 $\left(\frac{a}{2}, e\right]$ 上为增函数, $h(a) = g\left(\frac{a}{2}\right) = a \ln \frac{a}{2} - \frac{1}{4}a^2 - a$;

③当 $\frac{a}{2} \geq e$, 即 $a \geq 2e$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上为减函数, $h(a) = g(e) = (1-e)a + e^2 - 2e$.

$$\text{综上, } h(a) = \begin{cases} -a-1, & a \leq 2, \\ a \ln \frac{a}{2} - \frac{1}{4}a^2 - a, & 2 < a < 2e, \\ (1-e)a + e^2 - 2e, & a \geq 2e. \end{cases}$$

拓展视野 / 巧妙构造, 转化求解

导数关系构造函数的一些常见结构

1. 对于不等式 $f'(x) + g'(x) > 0$, 构造函数 $F(x) = f(x) + g(x)$.

2. 对于不等式 $f'(x) - g'(x) > 0$, 构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$.

特别地, 对于不等式 $f'(x) > k$, 构造函数 $F(x) = f(x) - kx$.

3. 对于不等式 $f(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, 构造函数 $F(x) = f(x)g(x)$.

4. 对于不等式 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0$, 构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

5. 对于不等式 $xf'(x) + nf(x) > 0$, 构造函数 $F(x) = x^n f(x)$.

6. 对于不等式 $f'(x) + f(x) > 0$, 构造函数 $F(x) = e^x f(x)$.

7. 对于不等式 $f'(x) + kf(x) > 0$, 构造函数 $F(x) = e^{kx} f(x)$.

【例 1】 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(1) = 0$, 当 $x < 0$ 时, 有 $xf'(x) - f(x) > 0$ 恒成立, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集为_____.

答案 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

解析 构造 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $F'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$,

当 $x < 0$ 时, $xf'(x) - f(x) > 0$, 可以推出当 $x < 0$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

$\because f(x)$ 为偶函数, $y = x$ 为奇函数, $\therefore F(x)$ 为奇函数,

$\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也单调递增.

根据 $f(1) = 0$ 可得 $F(1) = 0$, 根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象(图略), 根

据图象可知 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

【例 2】设函数 $f(x)$ 满足 $x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{e^x}{x}$, $f(2) = \frac{e^2}{8}$, 则 $x>0$ 时, $f(x)$ ()

- A. 有极大值, 无极小值 B. 有极小值, 无极大值
C. 既有极大值又有极小值 D. 既无极大值也无极小值

答案 D

解析 构造函数 $g(x) = x^2 f(x)$, 则 $g'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(2) = 2^2 f(2) = \frac{e^2}{2}$.

所以 $f(x) = \frac{g'(x)}{x^2}$,

$$f'(x) = \frac{xg'(x) - 2g(x)}{x^3} = \frac{e^x - 2g(x)}{x^3}.$$

记 $h(x) = e^x - 2g(x)$, 则 $h'(x) = e^x - 2g'(x) = \frac{e^x}{x}(x-2)$, 当 $0 < x < 2$ 时, $h'(x) < 0$, 所以

$h(x)$ 单调递减;

当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 单调递增.

故 $[h(x)]_{\min} = e^2 - 2g(2) = 0$, 所以 $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3} \geq 0$ 恒成立, 故函数 $f(x)$ 既无极大值

也无极小值. 故选 D.

【例 3】已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x)$ 满足: $(x-1)[f'(x) - f(x)] > 0$, $f(2-x) = f(x)e^{2-2x}$, 则下列判断一定正确的是 ()

- A. $f(1) < f(0)$ B. $f(2) > e^2 f(0)$
C. $f(3) > e^3 f(0)$ D. $f(4) < e^4 f(0)$

答案 C

解析 构造 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 形式,

$$\text{则 } F'(x) = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x},$$

导函数 $f'(x)$ 满足 $(x-1)[f'(x) - f(x)] > 0$,

则 $x \geq 1$ 时 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x < 1$ 时 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减.

又由 $f(2-x) = f(x)e^{2-2x} \Leftrightarrow F(2-x) = F(x) \Rightarrow F(x)$ 关于 $x=1$ 对称,

根据单调性和图象, 可知选 C.

【例4】已知 $a=\pi^e$, $b=3^\pi$, $c=e^\pi$, 则它们的大小关系是()

- A. $a>b>c$ B. $c>b>a$
C. $b>c>a$ D. $c>a>b$

答案 C

解析 因为函数 $y=x^\pi$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $3^\pi>e^\pi$.

构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0, e)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x\in(e, +\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减.

所以, $f(x)$ 的最大值为 $f(e)$,

故 $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln \pi}{\pi}$, 所以 $e^\pi>\pi^e$.

综合可知: $3^\pi>e^\pi>\pi^e$, 所以 $b>c>a$. 故选 C.

思维升华 函数与方程思想、转化与化归思想是高中数学思想中比较重要的两大思想, 而构造函数的解题思路恰好是这两种思想的良好体现.

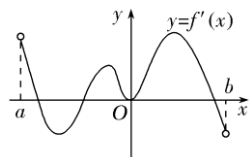
课后巩固作业

分层训练 · 提升能力

A 级 基础巩固

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 (a, b) , 导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 上的图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上的极大值点的个数为 ()



- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

答案 B

解析 由函数极值的定义和导函数的图象可知, $f'(x)$ 在 (a, b) 上与 x 轴的交点个数为 4, 但是在原点附近的导数值恒大于零, 故 $x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点. 其余的 3 个交点都是极值点, 其中有 2 个点满足其附近的导数值左正右负, 故极大值点有 2 个.

2. 函数 $y=xe^x$ 的最小值是()

- A. -1 B. -e C. $-\frac{1}{e}$ D. 不存在

答案 C

解析 因为 $y=xe^x$, 所以 $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$, 当 $x>-1$ 时, $y'>0$; 当 $x<-1$ 时, $y'<0$, 所以当 $x=-1$ 时, 函数取得最小值, 且 $y_{\min}=-\frac{1}{e}$.

3. 函数 $f(x)=3x^2+\ln x-2x$ 的极值点的个数是()

A.0 B.1 C.2 D.无数

答案 A

解析 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{且 } f'(x)=6x+\frac{1}{x}-2=\frac{6x^2-2x+1}{x},$$

由于 $x>0$, $g(x)=6x^2-2x+1$ 的 $\Delta=-20<0$,

所以 $g(x)>0$ 恒成立, 故 $f'(x)>0$ 恒成立,

即 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 无极值点.

4. 已知 a 为函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点, 则 a 等于()

A.-4 B.-2 C.4 D.2

答案 D

解析 由题意得 $f(x)=3x^2-12$, 由 $f(x)=0$ 得 $x=\pm 2$, 当 $x\in(-\infty, -2)$ 时, $f'(x)>0$,

函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in(-2, 2)$ 时, $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 当 $x\in(2, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以 $a=2$.

5. 已知函数 $f(x)=2\ln x+ax^2-3x$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 则 $f(x)$ 的极大值为()

A.2 B. $-\frac{5}{2}$ C. $3+\ln 2$ D. $-2+2\ln 2$

答案 B

解析 由题意得, $f(x)=\frac{2}{x}+2ax-3$, $\because f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, $\therefore f(2)=4a-2$

$$=0, \text{ 解得 } a=\frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-3x, f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{(x-1)(x-2)}{x},$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$, $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

$$\therefore f(x) \text{ 的极大值为 } f(1)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}.$$

6.(多选题)(2021 武汉统考)设函数 $f(x)=\frac{e^x}{\ln x}$, 则下列说法正确的是()

A. $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$

B.当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 的图象位于 x 轴下方

C. $f(x)$ 存在单调递增区间

D. $f(x)$ 有且仅有两个极值点

答案 BC

解析 由题意函数 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} x > 0, \\ \ln x \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, 故 A 不正确; $f(x)=\frac{e^x}{\ln x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $e^x > 0$, $\ln x < 0$, 所以

$f(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的图象在 x 轴的下方, 故 B 正确; 因为 $f'(x)=\frac{e^x(\ln x - \frac{1}{x})}{(\ln x)^2}$,

设 $g(x)=\ln x - \frac{1}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x)=\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, 所以当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增, $g(1)=0 - \frac{1}{1} < 0$, $g(e^2)=2 - \frac{1}{e^2} > 0$, 则 $g(x)$ 存在唯一零点 $x_0 \in (1, e^2)$, 则函数 $f'(x)=0$ 只有一个根 x_0 , 使得 $f'(x_0)=0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 只有一个极小值, 所以 C 正确, D 不正确; 故选 BC.

二、填空题

7.若商品的年利润 y (万元)与年产量 x (百万件)的函数关系式为 $y=-x^3+27x+123(x>0)$, 则获得最大利润时的年产量为_____百万件.

答案 3

解析 $y'=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$, 当 $0 < x < 3$ 时, $y' > 0$; 当 $x > 3$ 时, $y' < 0$.

故当 $x=3$ 时, 该商品的年利润最大.

8.(2020 徐州十校联考)已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax)e^x$ 的一个极值点, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为_____.

答案 $-\frac{3}{2}$

解析 由 $f(x)=(x^2+ax)e^x$,

得 $f'(x)=(x^2+ax+2x+a)e^x$,

因为 $x=1$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax)e^x$ 的一个极值点,

所以 $f'(1)=(3+2a)e=0$, 解得 $a=-\frac{3}{2}$.

$\therefore f(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)e^x$, 所以 $f'(0)=-\frac{3}{2}$.

所以曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 $-\frac{3}{2}$.

9. 函数 $f(x)=x^3-3x-1$, 若对于区间 $[-3, 2]$ 上的任意 x_1, x_2 , 都有 $|f(x_1)-f(x_2)| \leq t$, 则实数 t 的最小值是_____.

答案 20

解析 因为 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$,

令 $f'(x)=0$, 得 $x=\pm 1$, 可知 $-1, 1$ 为函数的极值点.

又 $f(-3)=-19, f(-1)=1, f(1)=-3, f(2)=1$,

所以在区间 $[-3, 2]$ 上, $f(x)_{\max}=1, f(x)_{\min}=-19$.

由题设知在区间 $[-3, 2]$ 上, $f(x)_{\max}-f(x)_{\min} \leq t$,

从而 $t \geq 20$, 所以 t 的最小值是 20.

三、解答题

10. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$, $f(4)=8$, 求 a 的值;

(2) 若 $a \neq b, b=c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值.

解 (1) 因为 $a=b=c$,

所以 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$.

因为 $f(4)=8$, 所以 $(4-a)^3=8$, 解得 $a=2$.

(2) 因为 $b=c$, 所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$, 从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)$.

令 $f'(x)=0$, 得 $x=b$ 或 $x=\frac{2a+b}{3}$.

令 $f(x)=0$, 得 $x=a$ 或 $x=b$.

因为 $a, b, \frac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 且 $a \neq b$,

所以 $\frac{2a+b}{3}=1$, $a=3$, $b=-3$.

此时, $f(x)=(x-3)(x+3)^2$, $f'(x)=3(x+3)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$, 得 $x=-3$ 或 $x=1$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 变化如下表:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$.

11. 已知函数 $f(x)=e^x \cos x - x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

解 (1) 因为 $f(x)=e^x \cos x - x$,

所以 $f'(x)=e^x(\cos x - \sin x) - 1$, $f'(0)=0$.

又因为 $f(0)=1$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

(2) 设 $h(x)=e^x(\cos x - \sin x) - 1$,

则 $h'(x)=e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

所以对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 有 $h(x) < h(0)=0$, 即 $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f(0)=1$, 最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

B 级 能力提升

12. (多选题) (2021 青岛调研) 若点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) 是函数 $f(x)=$

又函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (a-1)x - a\ln x$ 存在唯一的极值, 所以 $x=1$, 此时 $a \geq 0$.

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = \frac{1}{2} + a - 1 = a - \frac{1}{2}$,

故 $f(1) \geq 1$, 即 $a - \frac{1}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq \frac{3}{2}$.

14.(2021·重庆诊断)已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2)设函数 $g(x) = f(x) - a(x-1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值(其中 e 为自然对数的底数).

解 (1) $f'(x) = \ln x + 1, x > 0$,

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减,

在区间 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $x = \frac{1}{e}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 极大值点不存在.

(2) $g(x) = x \ln x - a(x-1) (x > 0)$,

则 $g'(x) = \ln x + 1 - a$,

由 $g'(x) = 0$, 得 $x = e^{a-1}$.

所以在区间 $(0, e^{a-1})$ 上, $g(x)$ 为减函数,

在区间 $(e^{a-1}, +\infty)$ 上, $g(x)$ 为增函数.

当 $e^{a-1} \leq 1$, 即 $a \leq 1$ 时, 在区间 $[1, e]$ 上, $g(x)$ 为增函数,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(1) = 0$.

当 $1 < e^{a-1} < e$, 即 $1 < a < 2$ 时, $g(x)$ 在区间 $[1, e^{a-1}]$ 上为减函数, 在区间 $[e^{a-1}, e]$ 上为增函数, 所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(e^{a-1}) = a - e^{a-1}$.

当 $e^{a-1} \geq e$, 即 $a \geq 2$ 时, 在区间 $[1, e]$ 上, $g(x)$ 为减函数,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(e) = a + e - ae$.

综上, 当 $a \leq 1$ 时, $g(x)$ 的最小值为 0;

当 $1 < a < 2$ 时, $g(x)$ 的最小值为 $a - e^{a-1}$;

当 $a \geq 2$ 时, $g(x)$ 的最小值为 $a + e - ae$.