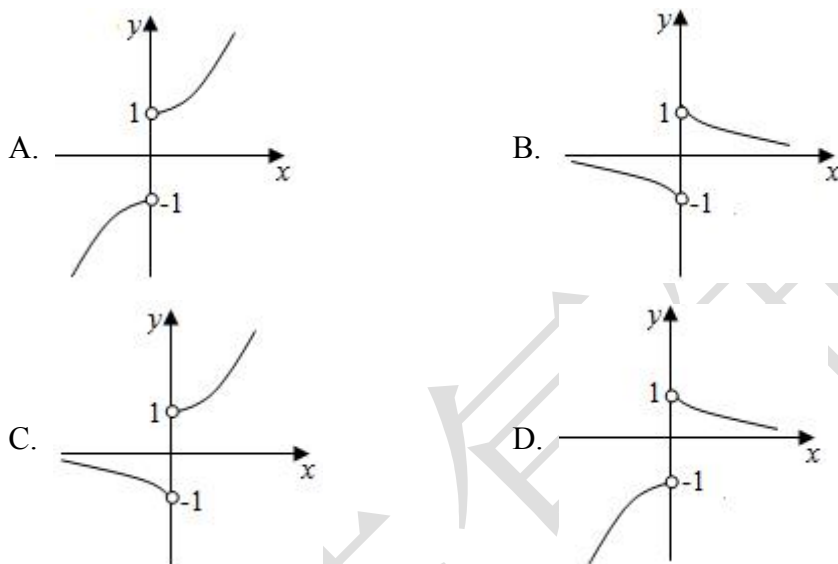


高一数学小练（十一）

一、选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 设集合 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x|x^2-4x+m=0\}$. 若 $A \cap B=\{1\}$, 则 $B=$ ()
A. $\{1, -3\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$
2. 若 $a>b>0$, $0<c<1$, 则 ()
A. $\log_a c < \log_b c$ B. $\log_c a < \log_c b$ C. $a^c < b^c$ D. $c^a > c^b$
3. 函数 $y = \frac{xa^x}{|x|}$ ($a>1$) 的图象的大致形状是 ()



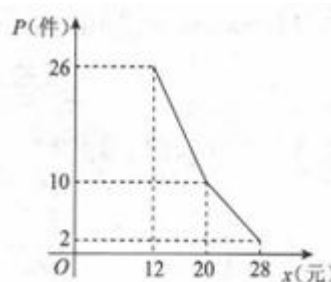
4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R . 当 $x<0$ 时, $f(x) = x^3-1$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $f(x+\frac{1}{2}) = f(x-\frac{1}{2})$. 则 $f(6) =$ ()
A. -2 B. 1 C. 0 D. 2
5. 在下列区间中, 函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 的零点所在的区间为 ()
A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$
6. 关于 x 的不等式 $x^2 + ax - 2 < 0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围为 ()
A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

二、填空题（本大题共 3 小题，共 15.0 分）

7. 计算: $8^{-\frac{2}{3}} + \lg 100 - (-\frac{7}{8})^0 =$ _____.
8. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + 1$, 若 $f(a) = 8$, 则 $f(-a) =$ _____.
9. 已知 $f(2x+1) = x^2 + x$, 则 $f(x) =$ _____.

三、解答题（本大题共 2 小题，共 24.0 分）

10. 某网店经营的一种商品进价是每件 10 元, 根据一周的销售数据得出周销量 P (件) 与单价 x (元) 之间的关系如图折线所示, 该网店与这种商品有关的周开支均为 25 元.



(I) 根据周销量图写出周销量 P (件) 与单价 x (元) 之间的函数关系式;

(II) 写出周利润 y (元) 与单价 x (元) 之间的函数关系式; 当该商品的销售价格为多少元时, 周利润最大? 并求出最大周利润.

11. 已知对数函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) .

(1) 若 $f(8) = 3$, 求 a 的值;

(2) 解不等式 $f(x) \leq \log_a (2-3x)$.

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】

解:集合 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x|x^2-4x+m=0\}$.

若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $1 \in A$ 且 $1 \in B$,

可得 $1-4+m=0$, 解得 $m=3$,

即有 $B=\{x|x^2-4x+3=0\}=\{1, 3\}$.

故选:C.

由交集的定义可得 $1 \in A$ 且 $1 \in B$, 代入二次方程, 求得 m , 再解二次方程可得集合 B .

本题考查集合的运算, 主要是交集的求法, 同时考查二次方程的解法, 运用

定义法是解题的关键, 属于基础题.

2. 【答案】B

【解析】

解: $\because a > b > 0$, $0 < c < 1$,

$\therefore \log_c a < \log_c b$, 故 B 正确;

$\therefore$ 当 $a > b > 1$ 时,

$0 > \log_a c > \log_b c$, 故 A 错误;

$a^c > b^c$, 故 C 错误;

$c^a < c^b$, 故 D 错误;

故选:B.

根据指数函数, 对数函数, 幂函数的单调性结合换底公式, 逐一分析四个结论的真假, 可得答案.

本题考查的知识点是指数函数, 对数函数, 幂函数的单调性, 难度中档.

3. 【答案】C

【解析】

解: $f(x)$ 是分段函数, 根据 x 的正负写出分段函数的解析式, $f(x)$

$$= \begin{cases} a^x & (x > 0) \\ -a^x & (x < 0) \end{cases},$$

∴ $x > 0$ 时, 图象与 $y = a^x$ 在第一象限的图象一样, $x < 0$ 时, 图象与 $y = a^x$ 的图象关于 x 轴对称,

故选:C.

$f(x)$ 中含有 $|x|$, 故 $f(x)$ 是分段函数, 根据 x 的正负写出分段函数的解析式, 对照图象选择即可.

本题考查识图问题, 利用特值或转化为比较熟悉的函数, 利用图象变换或利用函数的性质是识图问题常用的方法.

4. 【答案】D

【解析】

解: ∵ 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x + \frac{1}{2}) = f(x - \frac{1}{2})$,

∴ 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x+1) = f(x)$, 即周期为 1.

∴ $f(6) = f(1)$,

∵ 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$,

∴ $f(1) = -f(-1)$,

∵ 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$,

∴ $f(-1) = -2$,

∴ $f(1) = -f(-1) = 2$,

∴ $f(6) = 2$.

故选:D.

求得函数的周期为 1, 再利用当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$, 得到 $f(1) = -f(-1)$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$, 得到 $f(-1) = -2$, 即可得出结论.

本题考查函数值的计算, 考查函数的周期性, 考查学生的计算能力, 属于中档题.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考察了函数零点的判断方法, 借助函数的单调性, 函数值, 属于中档

题. 根据函数的单调性函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 单调递增, 运用零点判定定理, 判定区间.

【解答】

解： $\because$ 函数 $f(x)=e^x+4x-3$,

$\therefore$ 函数在 R 上为增函数,

又： $f(0)=e^0-3=-2<0$,

$f(\frac{1}{2})=\sqrt{e}+2-3=\sqrt{e}-1=e^{\frac{1}{2}}-e^0>0$,

$\therefore f(0) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)=e^x+4x-3$ 的零点所在的区间为 $(0, \frac{1}{2})$

故选 C.

6. 【答案】A

【解析】

解：关于 x 的不等式 $x^2+ax-2<0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解,

等价于 $a < (\frac{2}{x} - x)_{\min}, x \in [1, 4]$;

设 $f(x) = \frac{2}{x} - x, x \in [1, 4]$,

则函数 $f(x)$ 在 $x \in [1, 4]$ 单调递减,

且当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(1)=1$;

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

故选: A.

关于 x 的不等式 $x^2+ax-2<0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 等价于 $a < (\frac{2}{x} - x)_{\min}, x \in [1,$

$4]$, 求出 $f(x) = \frac{2}{x} - x$ 在 $x \in [1, 4]$ 的最大值即可.

本题考查了函数的单调性、分离参数法, 考查了等价转化能力, 是综合性题目.

7. 【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】

解：原式 $= 2^{3 \times (-\frac{2}{3})} + 2 - 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

故选: $\frac{5}{4}$.

利用指数与对数的运算性质即可得出.

本题考查了指数与对数的运算性质,考查了推理能力与计算能力,属于基础题.

8.【答案】-6

【解析】

解:∵函数 $f(x)=ax^3+bx+1$,

$$\therefore f(-x)=a(-x)^3+b(-x)+1=-ax^3-bx+1,$$

$$\therefore f(-x)+f(x)=2,$$

$$\therefore f(-a)+f(a)=2.$$

$$\therefore f(a)=8,$$

$$\therefore f(a)=-6.$$

故答案为-6.

本题利用函数的奇偶性,得到函数解析式 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系,从而通过 $f(-a)$ 的值求出 $f(a)$ 的值,得到本题结论.

本题考查了函数的奇偶性,本题难度不大,属于基础题.

9.【答案】 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}$

【解析】

解:令 $2x+1=t$, 则 $x=\frac{t-1}{2}$, 代入可得

$$f(t)=\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+\frac{t-1}{2}=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4},$$

$$\text{故 } f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$$

换元法:令 $2x+1=t$, 则 $x=\frac{t-1}{2}$, 代入可得 $f(t)$ 的解析式,进而可得 $f(x)$ 的解析式.

本题考查函数解析式的求法,换元是本题的关键,属基础题.

10.【答案】解: (I) 当 $x \in [12, 20]$ 时, $P=k_1x+b_1$, 代入点 $(12, 26)$, $(20, 10)$ 得 $k_1=-2$, $b_1=50$, $\therefore P=-2x+50$;

同理 $x \in (20, 28]$ 时, $P=-x+30$,

$$\therefore \text{周销量 } P \text{ (件) 与单价 } x \text{ (元) 之间的函数关系式 } P=\begin{cases} -2x+50, & 12 \leq x \leq 20 \\ -x+30, & 20 < x \leq 28 \end{cases};$$

$$(\text{II}) y=P(x-10)-25=\begin{cases} (-2x+50)(x-10)-25, & 12 \leq x \leq 20, \\ (-x+30)(x-10)-25 & 20 < x \leq 28, \end{cases}$$

当 $x \in [12, 20]$ 时, $y=-2(x-\frac{35}{2})^2+\frac{175}{2}$, $x=\frac{35}{2}$ 时, $y_{\max}=\frac{175}{2}$;

$x \in (20, 28]$ 时, $y = -(x-20)^2 + 75$, 函数单调递减, $\therefore y < 75$,

综上所述, $x = \frac{35}{2}$ 时, $y_{\max} = \frac{175}{2}$.

【解析】

(I) 根据函数图象, 求出解析式, 即可写出周销量 P (件)与单价 x (元)之间的函数关系式;

(II) 分段求出最值, 即可得出结论.

本题考查分段函数及运用, 考查分段函数的最值, 应考虑各段的最值, 考查运算能力, 属于中档题.

11. 【答案】解: (1) $\log_a 8 = 3$, $\therefore a = 2$;

(2) $\log_a x \leq \log_a (2-3x)$.

$a > 1$, $0 < x \leq 2-3x$, $\therefore 0 < x \leq \frac{1}{2}$, 不等式的解集为 $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{2}\}$;

$0 < a < 1$, $x \geq 2-3x > 0$, $\therefore \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$, 不等式的解集为 $\{x | \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}\}$.

【解析】

(1) 若 $f(8) = 3$, 即 $\log_a 8 = 3$, 可求 a 的值;

(2) 分类讨论, 利用对数函数的单调性, 即可得出结论.

本题考查对数函数, 考查函数的单调性, 属于中档题.