江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期末保温练习（1）

一、填空题（本大题共 12 小题，共 60.0 分）

1、已知集合 $A=\{-1,0,\ 1,\ 2\}$，$B=\{1,2,\ 3\}$，则集合 $A\cup B$ 中所有元素之和是______.

【答案】5

【解析】解：∵集合 $A=\{-1,0,\ 1,\ 2\}$，$B=\{1,2,\ 3\}$，

$\therefore A\cup B=\{-1,0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3\}$，

∴集合 $A\cup B$ 中所有元素之和是：$-1+0+1+2+3=5$.

2、计算：$(2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}\times(0.1)^{-1}-\lg2-\lg5=$______ .

【答案】19

【解析】解：$(2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}\times(0.1)^{-1}-\lg2-\lg5=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}\times(\frac{1}{10})^{-1}-(\lg2+\lg5)=20-1=19$.

3、命题“若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$”的否定为______ .

【答案】若 $ab=0$，则 $a\neq0$ 且 $b\neq0$”，

4、若幂函数 $y=(m^2-4m+1)x^{m^2-2m-3}$为$(0,+\infty)$上的增函数，则实数 m 的值等于______ .

【答案】4

【解析】解：由幂函数 $y=(m^2-4m+1)x^{m^2-2m-3}$为$(0,+\infty)$上的增函数，

可得$m^2-4m+1=1$，解得 $m=4$ 或 0；

又幂函数 $y=x^{m^2-2m-3}$在区间$(0,+\infty)$上是增函数，

$\therefore m^2-2m-3>0$，$\therefore m=4$ 时满足条件.

5、已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5)$在$(a,+\infty)$上是减函数，则函数 a 的取值范围是____________.

【答案】$[5,+\infty)$

【解析】解：设 $t=x^2-6x+5x^2-6x+5>0$，解得 $x<1$ 或 $x>5$.在$(-\infty,1)$上 $t=x^2-6x+5$ 是递减的，

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 也是递减的，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5)$在$(-\infty,1)$上是单调递增的，在$(5,+\infty)t=x^2-6x+5$ 是递增的，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 也是递减的，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5)$在$(5,+\infty)$上是单调递减的，所以 $a\geq5$.

6、定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$满足 $x^2f'(x)+1>0$ 0'/>，$f(1)=5$，则不等式 $f(x)<\frac{1}{x}+4$ 的解集为______.

【答案】$(0,1)$

【解析】解：由 $x^2f'(x)+1>0$ 0'/>，设 $g(x)=f(x)-\frac{1}{x}-4$，则 $g'(x)=f'(x)+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2f'(x)+1}{x^2}>0$ 0'/>.

故函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $g(1)=0$，故 $g(x)<0$ 的解集为$(0,1)$，即 $f(x)<\frac{1}{x}+4$ 的解集为$(0,1)$.

7、安排 3 名支教老师去 6 所学校任教，每校至多 2 人，则不同的分配方案共有_____种.(用数字作答)

【答案】210

【解析】解：分两类，(1)每校 1 人：$A_6^3=120$；(2)1 校 1 人，1 校 2 人：$C_3^2A_6^2=90$，不同的分配方案共有 $120+90=210$．故答案为 210.

8、已知函数 $f(x)=2^x$的定义域是$[0,3]$，设 $g(x)=f(2x)-f(x+2)$ ，则函数 $g(x)$的最大值和最小值之和为________________.

【答案】解：(1)$g(x)=f(2x)-f(x+2)=2^{2x}-2^{x+2}$，

$\because f(x)=2^x$的定义域是$[0,3]$，$\therefore\begin{cases}0\leq2x\leq3\\0\leq x+2\leq3\end{cases}$，解得 $0\leq x\leq1$，

$\therefore g(x)$的定义域为$[0,1]$．设$2^x=t$，则 $t\in[1,2]$，$\therefore g(t)=t^2-4t$，
$\therefore g(t)$在$[1,2]$上单调递减，$\therefore g(t)_{max}=g(1)=-3$，$g(t)_{min}=g(2)=-4$．
$\therefore$函数 $g(x)$的最大值为-3，最小值为-4．所以和为-7.

9、已知 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，并满足 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，当 $1\le x<2$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$，则 $f(6.5)=$__________．

【答案】1

【解析】解：由 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$得，$f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，$\therefore$函数 $f(x)$的周期是 4，

$\because f(x)$是定义在 R 上的偶函数，当 $1\le x<2$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$，

$\therefore f(6.5)=f(4+2.5)=f(2.5)=f(-4+2.5)$，

$=f(-1.5)=f(1.5)=\log_{\frac{1}{2}}(2-1.5)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$，

10、“解方程$(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x=1$”有如下思路；设 $f(x)=(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x$，则 $f(x)$在 R 上单调递减，且 $f(2)=1$，故原方程有唯一解 $x=2$，类比上述解题思路，不等式$x^6-(x+2)>(x+2)^3-x^2$的解集是______．

【答案】$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

【解析】解：不等式$x^6-(x+2)>(x+2)^3-x^2$变形为，
$x^6+x^2>(x+2)^3+(x+2)$；
令 $u=x^2$，$v=x+2$，则$x^6+x^2>(x+2)^3+(x+2)\Longleftrightarrow u^3+u>v^3+v$；
考察函数 $f(x)=x^3+x$，知 $f(x)$在 R 上为增函数，$\therefore f(u)>f(v)$，$\therefore u>v$；
不等式$x^6+x^2>(x+2)^3+(x+2)$可化为$x^2>x+2$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$；
$\therefore$不等式的解集为：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$．

11、若函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-mx+\ln x$ 有极值，则函数 $f(x)$的极值之和的取值范围是______．

【答案】$(-\infty,-3)$

【解析】 解：$\because f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，$f'(x)=x-m+\frac{1}{x}=\frac{x^2-mx+1}{x}$，

$\because f(x)$存在极值，$\therefore f'(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上有根，
即方程$x^2-mx+1=0$ 在$(0,+\infty)$上有根．设方程$x^2-mx+1=0$ 的两根为x_1，x_2，
$\therefore\triangle=m^2-4>0$，$x_1+x_2=m>0$，$x_1x_2=1$ 即 $m>2$

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-m(x_1+x_2)+(\ln x_1+\ln x_2)$，

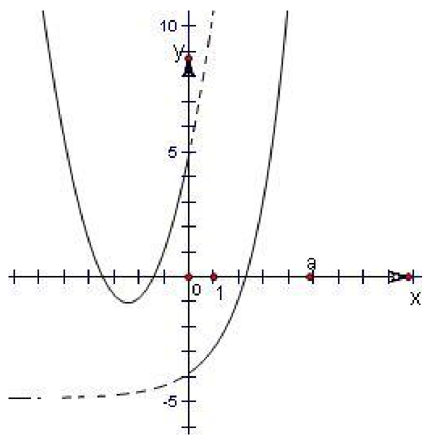
$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-x_1x_2-m(x_1+x_2)+\ln x_1x_2$，$=\frac{1}{2}m^2-1-m^2$，$=-\frac{1}{2}m^2-1<-3$，

故函数 $f(x)$的极值之和的取值范围是$(-\infty,-3)$．

12、已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x\ge0\\ x^2+ax+a, & x<0\end{cases}$有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是______．

【答案】$a>4$

【解析】解：由题意可得函数 $f(x)$的图象与 x 轴有三个不同的交点，如图所示：



等价于当 $x\ge0$ 时，方程$2^x-a=0$ 有一个根，且 $x<0$ 时，方程$x^2+ax+a=0$ 有两个根，

即$\begin{cases}a>0\\ \triangle=a^2-4a>0\end{cases}\Rightarrow a>4$．

二、解答题

13、若复数z_1满足$z_1=i(2-z_1)$(i 为虚数单位).

(1)求z_1;　　(2)求$|\overline{z}_1|$;　　(3)若$|z|=1$，求$|z-z_1|$的最大值.

【答案】解：(1)由$z_1=i(2-z_1)$，得$z_1=\frac{2i}{1+i}=1+i$;(2)$|\overline{z}_1|=|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$;

(3)$|z-z_1|$表示复数 z 与z_1对应的点 z 与z_1间的距离，
点 z 在圆$x^2+y^2=1$ 上，z_1的对应点为$z_1(1,1)$，
显然 z，z_1间的最大距离为$\sqrt{2}+1$，即$|z-z_1|_{\max}=\sqrt{2}+1$.

14、已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-ax}{x-1}$的图象关于原点对称，其中 a 为常数.

(1)求 a 的值;

(2)当 $x\in(1,+\infty)$时，$f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围;

(3)若关于 x 的方程 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$在$[2,3]$上有解，求 k 的取值范围.

【答案】解：(1) ∵函数 $f(x)$的图象关于原点对称，∴函数 $f(x)$为奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$，

即$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1+ax}{-x-1}=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-ax}{x-1}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{1-ax}$，解得：$a=-1$ 或 $a=1$(舍);

(2)$f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-1}+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，

$x>1$ 时，$\log_{\frac{1}{2}}(1+x)<-1$，

∵ $x\in(1,+\infty)$时，$f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<m$ 恒成立，∴ $m\geq-1$;

(3)由(1)得：$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$，即$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-1}=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$，

即$\frac{x+1}{x-1}=x+k$，即 $k=\frac{2}{x-1}-x+1$ 在$[2,3]$上有解，$g(x)=\frac{2}{x-1}-x+1$ 在$[2,3]$上递减，

$g(x)$的值域是$[-1,1]$，∴ $k\in[-1,1]$.

15、从 1 到 9 的这 9 个数字中取 3 个偶数 4 个奇数，试问：

(1)能组成多少个没有重复数字的七位数·

(2)上述七位数中，3 个偶数排在一起的有几个·

(3)问题(1)中的七位数中，偶数排在一起，奇数也排在一起的有几个·

【答案】解：(1)由题意知本题是一个分步计数问题，
第一步在 4 个偶数中取 3 个，有C_4^3种结果，
第二步在 5 个奇数中取 4 个，有C_5^4种结果，
第三步得到的 7 个数字进行排列有A_7^7种结果，
∴符合题意的七位数有$C_4^3C_5^4A_7^7=100800$.
(2)上述七位数中，三个偶数排在一起可以把三个偶数看成一个元素进行排列，
三个元素之间还有一个排列，有$C_4^3C_5^4A_5^5A_3^3=14400$.
(3)上述七位数中，3 个偶数排在一起有A_3^3种情况，4 个奇数也排在一起有A_4^4种情况，
共有$C_4^3C_5^4A_3^3A_4^4A_2^2=5760$ 个.

16、设$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$，$n\geq 4$，$n\in N*$.已知$a_3^2=2a_2a_4$.
(1)求 n 的值；
(2)设$(1+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，其中 a，$b\in N*$，求a^2-3b^2的值.
【答案】解：(1)由$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\dots+C_n^nx^n$，$n\geq 4$，

可得$a_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，$a_3=C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$，$a_4=C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

$a_3^2=2a_2a_4$，可得$(\frac{n(n-1)(n-2)}{6})^2=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

解得 $n=5$；

(2)方法一、$(1+\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5=a+b\sqrt{3}$,

由于 a，$b\in N*$，可得 $a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=1+30+45=76$，$b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$,
可得$a^2-3b^2=76^2-3\times 44^2=-32$；

方法二、$(1+\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5=a+b\sqrt{3}$,

$$(1-\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1(-\sqrt{3})+C_5^2(-\sqrt{3})^2+C_5^3(-\sqrt{3})^3+C_5^4(-\sqrt{3})^4+C_5^5(-\sqrt{3})^5$$

$=C_5^0-C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2-C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4-C_5^5(\sqrt{3})^5$,

由于 a，$b\in N*$，可得$(1-\sqrt{3})^5=a-b\sqrt{3}$,
可得$a^2-3b^2=(1+\sqrt{3})^5\cdot(1-\sqrt{3})^5=(1-3)^5=-32$.