

江苏省仪征中学 2020-2021 学年第一学期高二数学

周末练习 (7)

2020.11.14

一、选择题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

- 已知 $a + b > 0$, $b < 0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是()
 A. $a > b > -b > -a$ B. $a > -b > -a > b$
 C. $a > -b > b > -a$ D. $a > b > -a > -b$
- 若关于 x 的不等式 $(x - 2m)[x - (3 - m)] > 0$ 的解集为 $\{x | x < 3 - m \text{ 或 } x > 2m\}$, 则实数 m 的取值范围是()
 A. $m < 1$ B. $m \leq 1$ C. $m > 1$ D. $m \geq 1$
- 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 公差 $d = 2$, a_1, a_3, a_4 成等比数列, 则 $S_8 =$ ()
 A. -20 B. -18 C. -10 D. -8
- 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = -1$, $a_4 = -11$, S_n 为其前 n 项和, 且数列 $\{a_n + 2^n\}$ 为等差数列, 则 $S_{10} =$ ()
 A. -185 B. -2046 C. 65 D. -1981
- 若方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则实数 m 的取值范围是()
 A. $m < 2$ B. $0 < m < 2$ C. $2 < m < 4$ D. $m > 2$
- “ $ab < 0$ ” 是 “方程 $ax^2 + by^2 = c$ 表示双曲线” 的 ()
 A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
 C. 充要条件 D. 非充分非必要条件
- 设 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点, P 是双曲线 C 左支上的点, 已知 $A(1, 3)$, 则 $\triangle PAF$ 周长的最小值是()
 A. $3\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5} + 13$ C. $2\sqrt{5} + 13$ D. $2\sqrt{5}$
- 我国古代数学名著《增删算法统宗》中有一道题“九儿问甲歌”, 曰: “一个公公九个儿, 若问生年总不知, 知长排来争三岁, 共年二百又零七, 借问长儿多少岁, 各儿岁数要详推”. 大致意思是: 一个公公九个儿子, 若问他们的生年是不知道的, 但从老大开始排列, 后面儿子比前面儿子小 3 岁, 九个儿子共 207 岁, 问老大是多少岁?()
 A. 38 B. 35 C. 32 D. 29
 B.

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 则 m 的值为()
- A. 3 B. $\frac{5\sqrt{15}}{3}$ C. $\sqrt{15}$ D. $\frac{25}{3}$
10. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 则()
- A. $ab \geq 8$ B. $\frac{4}{b-2} + \frac{8}{a-1} \geq 8$ C. $\frac{4}{b-2} + \frac{8}{a-1} \geq 6$ D. $ab \leq 8$
11. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为递增数列, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 且满足 $a_n + a_{n+1} = 2n$, $b_n \cdot b_{n+1} = 2^n (n \in \mathbb{N})$, 则下列说法正确的有()
- A. $0 < a_1 < 1$ B. $1 < b_1 < \sqrt{2}$ C. $S_{2n} < T_{2n}$ D. $S_{2n} \geq T_{2n}$
12. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 双曲线 $N: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$. 若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点, 下列结论正确的是()
- A. 椭圆的离心率 $e = \sqrt{3} - 1$ B. 双曲线的离心率 $e = 2$
- C. 椭圆上不存在点 A 使得 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} < 0$
- D. 双曲线上存在点 B 使得 $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} < 0$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 若抛物线过点 $(-1, 3)$, 则抛物线的标准方程为_____.
14. 设斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $y^2 = ax (a \neq 0)$ 的焦点 F , 且和 y 轴交于点 A , 若 $\triangle OAF$ (O 为坐标原点) 的面积为 4, 则抛物线的方程为_____.
15. 已知正实数 x, y 满足 $x + 3y = 1$, 则 $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2y}$ 的最小值为_____.
16. 若直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 与抛物线交于 A, B 两点, 且线段 AB 中点的横坐标为 2, 则线段 AB 的长为_____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. 已知命题: “ $\exists x \in \{x | -1 < x < 1\}$, 使等式 $x^2 - x - m = 0$ 成立” 是真命题.

(1) 求实数 m 的取值集合 M ;

(2) 设不等式 $\frac{x+a-2}{x-a} \leq 0$ 的解集为 $\mathbf{N}$, 若 $x \in \mathbf{N}$ 是 $x \in \mathbf{M}$ 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(2, 0)$.

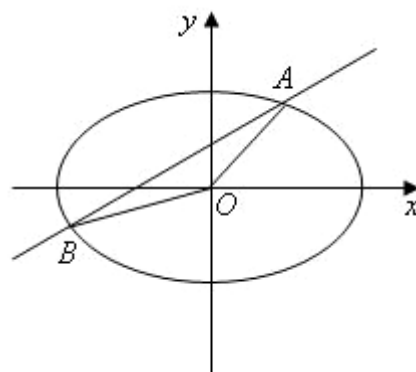
(1)求双曲线的方程;

(2)求双曲线的渐近线与直线 $x = -2$ 围成的三角形的面积.

19. 如图, 直线 $y = kx + b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 记 $\triangle AOB$ 的面积为 S .

(I)求在 $k = 0, 0 < b < 1$ 的条件下, S 的最大值;

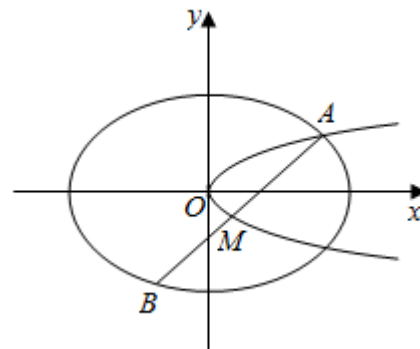
(II)当 $|AB| = 2, S = 1$ 时, 求直线 AB 的方程.



20. 如图, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$, 点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点. 过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B , 交抛物线 C_2 于点 M (B, M 不同于 A).

(1)若 $p = \frac{1}{16}$, 求抛物线 C_2 的焦点坐标;

(2)若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点, 求 p 的最大值.



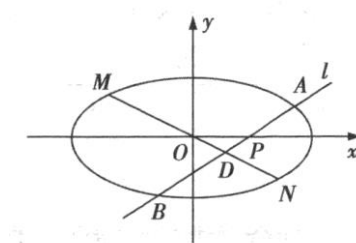
21. 已知 S_n 是单调递减等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_2 = \frac{1}{2}$, 且 $S_4 + a_4$ 、 $S_6 + a_6$ 、 $S_5 + a_5$ 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = -\log_2 a_n - \frac{n-4}{2}$, 数列 $\{\frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证:

$$\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{4}{3}.$$

22. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为2, 椭圆 C 上的点到右焦点距离的最大值为 $2 + \sqrt{3}$. 过点 $P(m, 0)$ 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 其中 $m > 0, k > 0$, D 是线段 AB 的中点, 直线 OD 交椭圆 C 于 M, N 两点.



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若 $m = 1, \overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OD} = \vec{0}$, 求 k 的值;

(3) 若存在直线 l , 使得四边形 $OANB$ 为平行四边形, 求 m 的取值范围.

周末练习(7) 答案和解析

1. 【答案】C

解：由题 $b < 0, a + b > 0$ 得 $a > 0, 0 < -b < a, b > -a$ ，所以 $a > -b > b > -a$ ，
故答案选 C.

2. 【答案】D

解：由题意，得 $2m \geq 3 - m$ ，解得 $m \geq 1$. 故选 D.

3. 【答案】D

解：等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2$ ， a_1, a_3, a_4 成等比数列，

可得 $a_3^2 = a_1 a_4$ ，即为 $(a_1 + 4)^2 = a_1(a_1 + 6)$ ，解得 $a_1 = -8$ ，

则 $S_8 = 8 \times (-8) + \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times 2 = -8$. 故选：D.

4. 【答案】D

解：由条件可知： $a_1 + 2, a_2 + 4, a_3 + 8, a_4 + 16$ 成等差数列，即 $a_1 + 2, 3, a_3 + 8, 5$ 成等差数列，

$\therefore a_1 + 2 = 2, a_3 + 8 = 4$ ，所以 $a_1 = 0, a_3 = -4$ ，

$\therefore \{a_n + 2^n\}$ 是首项为 2，公差为 1 的等差数列，

$\therefore a_n + 2^n = 2 + (n - 1) \times 1 = n + 1 \therefore a_n = n + 1 - 2^n$ ，

$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

$$= (2 + 3 + \cdots + 11) - (2 + 2^2 + \cdots + 2^{10})$$

$$= \frac{10 \times (2 + 11)}{2} - \frac{2(1 - 2^{10})}{1 - 2}$$

$= -1981$. 故选 D.

5. 【答案】B

解： $\because$ 方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，

$$\therefore \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m > 0 \\ 4 - m > m \end{cases}, \text{ 解得: } 0 < m < 2. \text{ 故选 B.}$$

6. 【答案】A

解：若 $ax^2 + by^2 = c$ 表示双曲线，即 $\frac{x^2}{\frac{c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1$ 表示双曲线，则 $c \neq 0$ ，

则 $\frac{c^2}{ab} < 0$ ，则 $ab < 0$ ，

这就是说 “ $ab < 0$ ” 是方程 $ax^2 + by^2 = c$ 表示双曲线的必要条件，

然而若 $ab < 0$, c 可以等于0, 此时方程 $ax^2 + by^2 = c$ 不表示双曲线,

即“ $ab < 0$ ”不是方程 $ax^2 + by^2 = c$ 表示双曲线的充分条件,

故“ $ab < 0$ ”是方程 $ax^2 + by^2 = c$ 表示双曲线的必要不充分条件.

故选 A.

7. 【答案】B

解: 设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ,

由题意可知, $c = \sqrt{16+9} = 5$, 则 $F_1(-5,0)$, $F(5,0)$,

又 $A(1,3)$, 则 $|AF| = 5$, 根据双曲线的定义可知, $|PF| = 2a + |PF_1|$,

所以 $\triangle PAF$ 的周长为 $|PF| + |PA| + |AF| = |PF_1| + |PA| + 13$,

当 A, P, F_1 三点共线时, $|PF_1| + |PA|$ 取得最小值, 即 $\triangle PAF$ 的周长取得最小值,

可得 $|AF_1| = \sqrt{(1+5)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$,

故 $\triangle PAF$ 周长的最小值为 $3\sqrt{5} + 13$. 故选 B.

8. 【答案】B

解: 由题意可知, 九个儿子的年龄可以看成以老大的年龄 a_1 为首项, 公差为 -3 的等

差数列, 所以 $9a_1 + \frac{9 \times 8}{2} \times (-3) = 207$, 解得 $a_1 = 35$. 故选 B.

9. 【答案】AD

解: 当椭圆的焦点坐标在 x 轴上时, 椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$,

可得: $\frac{\sqrt{5-m}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 解得 $m = 3$;

当椭圆的焦点坐标在 y 轴上时, 椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$,

可得: $\frac{\sqrt{m-5}}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 解得 $m = \frac{25}{3}$,

综上可知 m 的值为 3 或 $\frac{25}{3}$. 故选 AD.

10. 【答案】AB

解: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \Rightarrow ab \geq 8$, 当且仅当 $a = 2$, $b = 4$ 时等号成立;

$\because \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $\therefore b > 2$, $a > 1$, $a = \frac{b}{b-2}$,

$$\therefore \frac{4}{b-2} + \frac{8}{a-1} = \frac{4}{b-2} + \frac{8}{\frac{b}{b-2}-1}$$

$$= \frac{4}{b-2} + 4(b-2) \geq 2\sqrt{\frac{4}{b-2} \cdot 4(b-2)} = 8,$$

当且仅当 $a = b = 3$ 时等号成立. 故选 AB.

11. 【答案】ABC

本题考查数列的函数特征，数列的递推关系及综合应用，属难题.

根据递推关系可得数列 $\{a_n\}$ 为隔项以 2 为公差的等差数列形式，数列 $\{b_n\}$ 为隔项以 2 为

公比的等比数列形式，A 选项，先解得 $\begin{cases} a_2 = 2 - a_1 \\ a_3 = 4 - a_2 \end{cases}$ ，数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，即

$\begin{cases} a_1 < 1 \\ 2 - a_1 = a_2 < 2 \end{cases}, 0 < a_1 < 1$ ，正确；B 选项，先解得 $\begin{cases} b_3 = 2b_1 \\ b_2 = \frac{2}{b_1} \end{cases}$ ，由数列 $\{a_n\}$ 为递增数

列，可得 $\begin{cases} b_2 = \frac{2}{b_1} > b_1 \\ b_3 > b_2 \\ b_3 = 2b_1 > b_1 \end{cases}$ ，求解可得 B 正确；求得 S_{2n}, T_{2n} ，比较即可得到 C 正确.

【解答】

解：数列 $\{a_n\}$ 中 $a_n + a_{n+1} = 2n$ ，则 $a_{n+1} + a_{n+2} = 2n + 2$ ，

两式相减得 $a_{n+2} - a_n = 2$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 为隔项以 2 为公差的等差数列形式；

数列 $\{b_n\}$ 中 $b_n b_{n+1} = 2^n$ ，则 $b_{n+1} b_{n+2} = 2^{n+1}$ ，两式相除得 $\frac{b_{n+2}}{b_n} = 2$

所以数列 $\{b_n\}$ 为隔项以 2 为公比的等比数列形式；

A 选项因为 $a_n + a_{n+1} = 2n$ ，所以 $\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ a_3 + a_2 = 4 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_2 = 2 - a_1 \\ a_3 = 4 - a_2 \end{cases}$ ，

又数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $\begin{cases} a_2 = 2 - a_1 > a_1 \\ a_3 = 4 - a_2 > a_2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1 < 1 \\ 2 - a_1 = a_2 < 2 \end{cases}$

所以 $0 < a_1 < 1$ ，正确；

B 选项因为 $b_n b_{n+1} = 2^n$ ，

所以 $\begin{cases} \frac{b_3}{b_1} = 2 \\ b_1 b_2 = 2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b_3 = 2b_1 \\ b_2 = \frac{2}{b_1} \end{cases}$ ，

又数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，

所以 $\begin{cases} b_2 = \frac{2}{b_1} > b_1 \\ b_3 > b_2 \\ b_3 = 2b_1 > b_1 \end{cases} \Rightarrow 2b_1 > \frac{2}{b_1} \Rightarrow \begin{cases} b_1 > 0 \\ 1 < b_1^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < b_1 < \sqrt{2}$ ，正确；

因为 $S_{2n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$

$$= \left[na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \right] + \left[na_2 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \right] = n(a_1 + a_2) + 2n^2 - 2n = 2n^2$$

$$T_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{2n-1} + b_{2n}$$

$$= (b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2n})$$

$$= \frac{b_1(1-2^n)}{1-2} + \frac{b_2(1-2^n)}{1-2} = (2^n - 1)(b_1 + b_2) \geq 2\sqrt{b_1 \cdot b_2}(2^n - 1) = 2\sqrt{2}(2^n - 1),$$

易知对任意的 $n \in N^*$, $2\sqrt{2}(2^n - 1) > 2n^2$ 恒成立, 即 $S_{2n} < T_{2n}$ 恒成立,

所以 C 选项正确, D 选项错误.

故答案为 ABC .

12. 【答案】ABD

【解答】

解: 椭圆 M : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 双曲线 N : $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$,

若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点,

设椭圆的右焦点坐标 $(c, 0)$, 则正六边形的一个顶点 $(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2})$,

A. 将 $(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2})$ 代入椭圆方程, 得: $\frac{c^2}{4a^2} + \frac{3c^2}{4b^2} = 1$,

结合 $e_1 = \frac{c}{a}$, $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $e_1^4 - 8e_1^2 + 4 = 0$,

因为 $e_1 \in (0, 1)$, 解得 $e_1 = \sqrt{3} - 1$, 故 A 正确;

B. 把 $(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2})$ 代入双曲线的渐近线方程 $y = \frac{n}{m}x$ (不妨设 $m > 0$, $n > 0$),

得 $\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{n}{m} \times \frac{1}{2}c$, 所以 $\frac{n}{m} = \sqrt{3}$,

则双曲线的离心率 $e_2 = \sqrt{1 + (\frac{n}{m})^2} = 2$, 故 B 正确;

C. 当 A 点是短轴的端点时, $\angle F_1AF_2$ 最大,

由 $\frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1$, 得 $\frac{c^2}{a^2} = 4 - 2\sqrt{3}$, 又 $c^2 = a^2 - b^2$,

从而可得 $\frac{b^2}{a^2} = 2\sqrt{3} - 3$, $\frac{c^2}{b^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$,

所以 $c > b$, 则 $\frac{1}{2}\angle F_1AF_2 > \frac{\pi}{4}$, 即 $\angle F_1AF_2 > \frac{\pi}{2}$,

所以 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} < 0$, 故 C 错误;

D. 当 B 点在实轴的端点时, 向量 $\overrightarrow{BF_1}$ 与向量 $\overrightarrow{BF_2}$ 夹角为 π ,

此时, $\overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} < 0$, 故 D 正确;

故答案为 ABD .

13. 【答案】 $y^2 = -9x$ 或 $x^2 = \frac{1}{3}y$

解：若抛物线的焦点在 x 轴，

设抛物线的方程为 $y^2 = mx$, $m \neq 0$, $\because$ 抛物线过点 $(-1, 3)$,

$\therefore 9 = -m$, 即 $m = -9$, $\therefore$ 此时抛物线方程为 $y^2 = -9x$.

若抛物线的焦点在 y 轴, 设抛物线的方程为 $x^2 = ny$, $n \neq 0$,

$\because$ 抛物线过点 $(-1, 3)$, $\therefore 1 = 3n$, 即 $n = \frac{1}{3}$,

此时抛物线方程为 $x^2 = \frac{1}{3}y$.

综上: $y^2 = -9x$ 或 $x^2 = \frac{1}{3}y$, 故答案为 $y^2 = -9x$ 或 $x^2 = \frac{1}{3}y$.

14. 【答案】 $y^2 = \pm 8x$

解：抛物线 $y^2 = ax$ ($a \neq 0$) 的焦点坐标是 $(\frac{a}{4}, 0)$,

故直线 l 的方程为 $y = 2(x - \frac{a}{4})$, 令 $x = 0$, 得 $y = -\frac{a}{2}$,

故 $\triangle OAF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \left| \frac{a}{4} \right| \times \left| -\frac{a}{2} \right| = \frac{a^2}{16} = 4$, $a = \pm 8$,

故抛物线的方程为 $y^2 = \pm 8x$.

15. 【答案】 4

【解析】 $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2y} \geq (x+3y)(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2y}) = \frac{2y}{x+y} + \frac{x+y}{2y} + 2 \geq 4$,

当且仅当 $x = y = \frac{1}{4}$ 时, $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2y}$ 的最小值为 4.

故答案为 4.

由题意知, $x + 3y = x + 2y + y$, 与 $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{2y}$ 相乘构造基本不等式得最值.

本题考查基本不等式应用, 属于中档题.

16. 【答案】 6

【解答】

解：因为直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 与抛物线交于 A, B 两点,

设出 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$, $x_1 + x_2 = 4$,

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + 2 = 4 + 2 = 6$. 故答案为 6.

17.【答案】解：(1)由题意知方程 $x^2 - x - m = 0$ 在 $(-1,1)$ 上有解，

即 m 的取值范围就是函数 $y = x^2 - x$ 在 $(-1,1)$ 上的值域，

$$\text{易得 } M = \left\{ m \mid -\frac{1}{4} \leq m < 2 \right\};$$

(2)因为 $x \in N$ 是 $x \in M$ 的必要不充分条件，所以 $M \subseteq N$ 且 $M \neq N$ ，

若 $M \subseteq N$ ，分以下几种情形研究：

①当 $a = 1$ 时，解集 N 为空集，不满足题意，

②当 $a > 1$ 时， $a > 2 - a$ ，此时集合 $N = \{x \mid 2 - a \leq x < a\}$ ，

则 $\begin{cases} 2 - a \leq -\frac{1}{4}, \\ a \geq 2 \end{cases}$ ，解得 $a \geq \frac{9}{4}$ ，且 $a = \frac{9}{4}$ 时， $M \neq N$ ，故 $a \geq \frac{9}{4}$ 满足题意，

③当 $a < 1$ 时， $a < 2 - a$ ，

此时集合 $N = \{x \mid a < x \leq 2 - a\}$ ，则 $\begin{cases} a < -\frac{1}{4}, \\ 2 - a \geq 2 \end{cases}$ ，

$$\text{解得 } a < -\frac{1}{4}.$$

综上 $a \geq \frac{9}{4}$ 或 $a < -\frac{1}{4}$ 时，

$x \in N$ 是 $x \in M$ 的必要不充分条件.

18.【答案】解：(1) $\because$ 双曲线的右焦点的坐标为 $(2,0)$ ，且双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 3 + b^2 = 4, \therefore b^2 = 1, \therefore \text{双曲线的方程为 } \frac{x^2}{3} - y^2 = 1.$$

(2) $\because a = \sqrt{3}, b = 1$ ， $\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

$$\text{令 } x = -2, \text{ 则 } y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

设直线 $x = -2$ 与双曲线的渐近线的交点为 A, B ，则 $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

记双曲线的渐近线与直线 $x = -2$ 围成的三角形的面积为 S ，

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

19.【答案】解：(I) 设点 A 的坐标为 (x_1, b) ，点 B 的坐标为 (x_2, b) ，

$$\text{由 } \frac{x^2}{4} + b^2 = 1, \text{ 解得 } x_{1,2} = \pm 2\sqrt{1-b^2},$$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2}b \cdot |x_1 - x_2| = 2b \cdot \sqrt{1-b^2} \leq b^2 + 1 - b^2 = 1.$$

当且仅当 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， S 取到最大值 1.

$$\text{(II) 解：由 } \begin{cases} y = kx + b \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{得 } (k^2 + \frac{1}{4})x^2 + 2kbx + b^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

$$\Delta = 4k^2 - b^2 + 1,$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_2 - x_1| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{4k^2 - b^2 + 1}}{\frac{1}{4} + k^2} = 2. \quad (2)$$

设 O 到 AB 的距离为 d ，则 $d = \frac{2S}{|AB|} = 1$ ，

$$\text{又因为 } d = \frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以 } b^2 = k^2 + 1, \text{ 代入 } (2) \text{ 式并整理，得 } k^4 - k^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{解得 } k^2 = \frac{1}{2}, b^2 = \frac{3}{2}, \text{ 代入 } (1) \text{ 式检验，} \Delta > 0,$$

$$\text{故直线 } AB \text{ 的方程是 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 或 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

20.【答案】解：(1) $p = \frac{1}{16}$ ，则 $\frac{p}{2} = \frac{1}{32}$ ，则抛物线 C_2 的焦点坐标 $(\frac{1}{32}, 0)$ ，

(2) 由题意可设直线 $l: x = my + t (m \neq 0, t \neq 0)$ ，点 $A(x_0, y_0)$ ，

$$\text{将直线 } l \text{ 的方程代入椭圆 } C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 + 2mty + t^2 - 2 = 0$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的纵坐标 } y_M = -\frac{mt}{m^2+2}.$$

将直线 l 的方程代入抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 得

$$y^2 - 2pmy - 2pt = 0, \therefore y_0 y_M = -2pt, \text{ 可得 } y_0 = \frac{2p(m^2+2)}{m},$$

$$\text{因此 } x_0 = \frac{2p(m^2+2)^2}{m^2},$$

$$\text{由 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \text{ 可得 } \frac{1}{p^2} = 4(m + \frac{2}{m})^2 + 2(m + \frac{2}{m})^4 \geq 160,$$

$$\text{即 } p^2 \leq \frac{1}{160}, \text{ 得 } p \leq \frac{\sqrt{10}}{40}, \text{ 当且仅当 } m = \sqrt{2}, t = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ 时，等号成立，} \therefore p \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{10}}{40}.$$

21. 【答案】解：(I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，由 $2(S_6 + a_6) = S_4 + a_4 + S_5 + a_5$ ，

得 $(S_6 - S_5) + (S_6 - S_4) + 2a_6 = a_4 + a_5$ ，即 $4a_6 = a_4$ ， $\therefore q^2 = \frac{1}{4}$ 。

$\therefore \{a_n\}$ 是单调递减数列， $\therefore q = \frac{1}{2}$ ，又 $\therefore a_2 = \frac{1}{2}$ ， $\therefore a_1 = 1$ ， $\therefore a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ 。

(II) 证明：由(I)知 $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ ， $\therefore b_n = -\log_2 a_n - \frac{n-4}{2} = (n-1) - \frac{n-4}{2} = \frac{1}{2}n + 1$ ，

$$\therefore \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{1}{(\frac{1}{2}n+1) \cdot (\frac{1}{2}n+\frac{3}{2})} = \frac{4}{(n+2) \cdot (n+3)} = 4(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})，$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{b_1 \cdot b_2} + \frac{1}{b_2 \cdot b_3} + \frac{1}{b_3 \cdot b_4} + \cdots + \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = 4(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + 4(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + 4(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) \cdots + 4(\frac{1}{n+2} -$$

$$\frac{1}{n+3}) = 4(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3})，$$

$$\therefore \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} > 0，\therefore T_n \geq T_1 = \frac{1}{3}，\text{又} \therefore \frac{1}{n+3} > 0，\therefore T_n < \frac{4}{3}。$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq T_n < \frac{4}{3}。$$

22. 【答案】解：(1) 由题意得， $2b = 2$ ， $a + c = 2 + \sqrt{3}$ ， $a^2 = b^2 + c^2$ ，

解得 $a = 2$ ， $b = 1$ ，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2) 当 $m = 1$ 时，直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}，\text{消去} y \text{得} (1 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0。$$

因为点 P 在椭圆 C 内，所以 $\Delta > 0$ 。

$$\text{所以} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}，\text{所以} D(\frac{4k^2}{1+4k^2}, \frac{-k}{1+4k^2})。$$

$$\text{所以} k_{OD} = \frac{\frac{-k}{1+4k^2}}{\frac{4k^2}{1+4k^2}} = -\frac{1}{4k}，\text{直线} MN \text{的方程为} y = -\frac{1}{4k}x。$$

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{1}{4k}x \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}，\text{消去} y \text{得} x^2 = \frac{16k^2}{1+4k^2}，\text{所以} M(\frac{-4k}{\sqrt{1+4k^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}})。$$

$$\text{因为} \overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OD} = \vec{0}，\text{所以} \frac{-4k}{\sqrt{1+4k^2}} + 3 \times \frac{4k^2}{1+4k^2} = 0。$$

因为 $k > 0$, 所以 $k = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) 直线 l 的方程为 $y = k(x - m)$,

由 $\begin{cases} y = k(x - m) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y 得 $(1 + 4k^2)x^2 - 8k^2mx + 4k^2m^2 - 4 = 0$.

所以 $\Delta = (-8k^2m)^2 - 4(1 + 4k^2)(4k^2m^2 - 4) > 0$, 即 $4k^2 - k^2m^2 + 1 > 0$, (*)

且 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2m}{1+4k^2}$, 所以 $D(\frac{4k^2m}{1+4k^2}, \frac{-km}{1+4k^2})$.

因为 M, N 关于原点对称,

所以由(2)易知, $N(\frac{4k}{\sqrt{1+4k^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+4k^2}})$.

由四边形 $OANB$ 为平行四边形, 得 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OD}$,

可得 $\frac{4k}{\sqrt{1+4k^2}} = 2 \times \frac{4k^2m}{1+4k^2}$, 解得 $m^2 = 1 + \frac{1}{4k^2}$.

因为将 $m^2 = 1 + \frac{1}{4k^2}$ 代入(*)式恒成立, 所以存在直线 l , 使得四边形 $OANB$ 为平行四边形,

所以当 $k > 0$ 时, $m^2 > 1$.

因为 $m > 0$, 所以 $m > 1$, 所以 m 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

【解析】 本题考查椭圆方程的求法, 考查满足条件的实数的取值范围的求法, 解题时要认真审题, 注意直线与椭圆的位置关系的综合运用.

(1) 由条件, $\begin{cases} 2b = 2 \\ a + c = 2 + \sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$, 即可求出椭圆方程;

(2) 当 $m = 1$ 时, 直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$, 根据韦达定理和中点坐标公式可得 D 点坐标, 即可求出直线 MN 的斜率, 可得直线 MN 的方程, 求出点 M 的坐标, 结合 $\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OD} = \vec{0}$, 求出 k 的值;

(3) 设直线 l 的方程为 $y = k(x - m)$, 求出点 D, N 的关系, 结合四边形 $OANB$ 为平行四边形, 即可求出 m 的取值范围.