

标(过程中需达到的目标)和起点能力;在过程组织方面,教师应分析达成不同学习结果所需要的学习条件.

应建立数学教学设计中的三大联系:建立学习结果类型(知识、智慧技能、思想方法、问题解决和态度)与学习条件的联系,如数学具体概念的学习需要学生辨认结构中已有具体的例子,并总括出下位例子中蕴含的概念;学习结果类型与教学方法的联系,如数学具体概念的学习应暴露在充分的正反例证中;目标过程与教学评价的联系,即将目标、活动和评价置于修订后的布鲁姆教育目标分类学下的同一个分类表中进行一致性检验.虽说未必需要经常

性地这样进行教学设计思考,但从教师的教学设计能力培养层面看,关注这些方面的细致性研究思考,无疑对教学设计能力的培养有着积极意义.

参考文献:

- [1] 马晓丹,张春莉.构建科学取向的数学设计能力培养体系[J].数学教育学报,2017(4):57.
- [2] 王尚志,张思明.走进高中数学新课程[M].上海:华东师范大学出版社,2008:358-359.

(收稿日期:2018-11-23)

量体裁衣 因材施教

——以“等比数列的前 n 项和”为例

刘 倩 胡典顺

(华中师范大学数学与统计学学院, 430079)

一、前言

“等比数列的前 n 项和”是人教版普通高中课程标准实验教科书数学必修五第二章“数列”中的重要内容之一,教学对象为高二学生,教学时数为 2 课时.本节课是第一课时,重点是等比数列前 n 项和公式的推导方法和简单应用.“等比数列的前 n 项和”既承接了等比数列的定义、等比数列的有关知识和内容,又是后面学习数列求和与研究数列极限的基础.

同时,推导出等比数列求和公式为极限的教学以及数学归纳法的学习做了很好的铺垫.等比数列求和公式的教学与学习过程体现了重要的数学思想与方法,而数学思想与方法贯穿于整个数学教学过程中,教师在等比数列求和公式教学过程中有必要对与其相关的数学思想与方法进行深入的研究与探讨,对这一节的教学有重要的指导意义.它对其它数学知识的学习也会有很大的帮助与指导作用.等比数列求和公式一节穿插了一些有趣的故事、数学家

的典故以及与生活息息相关的例子,有助于拓展学生的知识视野,让学生意识到数学学习是有趣的,最重要的是能增强学生学习数列的兴趣与积极性.

经过不断地改革,这一小节的内容更加丰富、完善,为当今的教学研究提供了可能性与必要性.在现实背景下,应站在更高的角度探讨和研究等比数列求和公式教学.从这一节内容本身出发,挖掘其内部蕴含的重要题材,结合当前教学理论,对数列教学提出更高的要求.

以下通过展示一位教师“等比数列的前 n 项和公式”的课堂实录,探索如何合理地来进行教学方法的选择,以及提升学生的数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

二、课堂教学实录

一节课想要有很好的收获,达到预期的教学目标,了解学情很有必要.高中的课程相对是十分紧张的,时间紧,课业重,不同班级学生的水平、层次、理解能力都各不相同,因此,在教学中单凭套用统一的

基金项目:1. 华中师范大学 2018 年中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(教师教育研究专项)——基于学习分析技术的学生数学核心素养形成机理研究(CCNUTE2018-09);2. 2017 年湖北省高等学校省级教学研究项目——提升数学卓越教师数学核心素养的理论与实践研究(201794).

模式是难以取得较大教学实效的,还需要就学情来进行教学方法的选择.为了深入了解一线数学教师的教学情况,研究他们如何引导学生推导等比数列的前 n 项和公式,以及在课堂教学中如何培养学生的数学运算和逻辑推理等数学核心素养,我们观摩了大量的一线数学课堂教学,包括课堂现场和教学录像,这里仅选取一个具有代表性的课堂实录进行展示.本文仅记录了教师讲解的重点过程和学生们具有代表性的回答,目的是让读者直观、真实地感受课堂的教学过程,在不影响整体教学效果的前提下,一些重复的学生答案和不影响教学过程的语言行为及细节未曾记录.

L 老师是一名特级教师,有 20 年的高中数学从教经历,以下是 L 老师的部分教学实录.

基本情况:任教班级 A 班共有 45 名学生,基础知识较扎实、思维较活跃,能够较好地理解教材上的内容,能较好地在教师引导下独立、合作地解决一些问题.

1. 由形到数,激发兴趣

师:今天很荣幸请到了我们班几位同学的家长和区教研员来参与我们的课堂,同学们,借助你们的手我们一起用热烈的掌声欢迎他们的到来.(鼓掌)

师:今天在座的每一位都要参与到我们的课堂中来,我们将这几位家长分为一组,家长对应的孩子们作为一组,我们 PK. 输了一组待会要表演节目的哦.

师:我们来看一个几何图形(如图 1),由这个图形可知阴影部分的面积总和为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$,那么它等于多少呢?

生 1: $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

师:非常棒!你能跟我们解释一下吗?

生 1: 阴影部分面积等于 1 减去空白部分面积.

师:通过图形我们得到了一个数学等式,那么,现在这个图形就“功成身退”了,如果不借助图形,你能求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = ?$ 吗? 现在家长组和学生组进行 PK,看哪一组的想法更好?

生 2: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{32} - \frac{1}{64}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

$$- \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{32} - \frac{1}{64}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

(教室响起了掌声)

师:哇!太妙了,我必须为这位同学点个赞!原来这个求和可以转化为裂项相消.还有其它不一样的解法吗?

生 3: 先通分,后算分子之和.

师:很好,通分之后变为了另一个求和,这也是我们这节课要解决的问题.还有想法吗?

生 4: 加一项减一项,即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} - \frac{1}{64} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \dots \\ &= 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}. \end{aligned}$$

(掌声响起)

师:这位同学“加一项,减一项”用得非常巧妙,比喻为“一借一还”.信用卡一借一还信用就升高了.这位同学的“一借一还”加法变为减法,化复杂为简单,问题就解决了.

2. 继续探究,发散思维

师:比较妙的想法大家都想将它发扬光大,根据这两个方法你们能求出 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$ 的值吗?

生 6: $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = (2 - 1) + (2^2 - 2) + \dots + (2^{64} - 2^{63}) = 2^{64} - 1$.

师:这位同学学会了一项变两项,转化为裂项相消法求和.非常好,还有同学有其它想法吗?

生 7: 加 1 减 1. 即 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = (1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}) - 1 = \dots = 2^{64} - 1$.

师:这位同学思维很敏捷,迅速的学会了“一借一还”的方法.上面几位同学的想法都很棒!

生 8: $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$,

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64},$$

两式相减即得 $S = 2^{64} - 1$.

师:我现在想采访一下生 8,你是怎么想到将两边同时乘以 2 的呢?

生 8: 因为乘以 2 以后前一项就变成后一项,这样一来相减就能消掉.

师:生 8 将生 6 的方法进行了提炼,操作实用性更强了.太棒了!我们给这种方法取个名字,你觉得取个什么名字比较好呢?

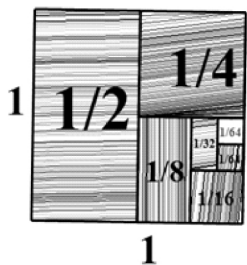


图 1

生:杨氏法(回答问题的学生姓杨).

师:好的,我们就这样称呼,但是它还有一个官方的名字叫错位相减法.

我们刚计算得到的结果是 2^{64} , 那么这个数到底有多大呢? 有一个传说, 国际象棋起源于古代印度. 相传国王要奖赏国际象棋的发明者. “请在第一个格子里放上 1 颗麦粒, 第二个格子里放上 2 颗麦粒, 第三个格子里放上 4 颗麦粒, 以此类推. 每一个格子里放的麦粒都是前一个格子里放的麦粒的 2 倍. 直到第 64 个格子. 请给我足够的麦粒以实现上述要求.” 这就是国际象棋发明者向国王提出的要求. 可以先计算出总的麦粒数: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = ?$ 假定 1000 粒麦子的质量为 40 克, 最后通过换算发现共需要麦子 7379 亿吨, 把全世界一百年生产的麦子给他都不够(目前世界小麦年度产量约 60 亿吨). 看来, 我们都需要学习好数学, 免得被人忽悠.

3. 公式探究, 形成方法

师:我们继续来看看这个错位项减法, 第一步是干什么呢?

生:两边同时乘以 2.

师:那么 2 又是什么呢?

生:等比数列的公比.

师:第二步干什么呢?

生:两式相减, 消掉相同的项.

师:前面两个数列实际上有一个共同特征, 就是等比数列. 那么, 对于一般的等比数列 $\{a_n\}$, 若公比为 q , 通过上述方法, 你能用 a_1, n, q 来表示等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 吗?

生:如果记 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$, 那么 $qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$, 要想得到 S_n , 只要将两式相减, 就立即有 $(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n$. 如果 $q \neq 1$, 则有 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$; 如果 $q = 1$, 则 $S_n = na_1$.

师:综合上面的探究过程, 我们得出:

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1, \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

师:我们学习过等差数列前 n 项和公式, 知道它有两种形式, 其中一种是用首项、末项、项数来表示的, 那么你能用 a_1, q, a_n 表示等比数列的前 n 项和吗?

$$\text{生 9: } S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1, \\ \frac{a_1 - a_nq}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

师:这就是我们这节课所要学习的主要内容, 等比数列前 n 项和公式.

4. 公式应用, 巩固提高

师:我们花了很大力气推导出来了等比数列的前 n 项和公式, 那么我们就要对它加以运用. 我们继续回到我们课前的一个等比数列中来, 即:

已知等比数列为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$.

(1) 求该数列前 8 项和;

(2) 求第 5 项到第 10 项和;

(3) 求前 $2n$ 项中所有偶数项的和;

(4) 前多少项的和为 $\frac{1023}{1024}$?

(演板) 生 10: (1) 由题意

$$S_8 = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^8]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^8 = \frac{255}{256}.$$

$$\text{生 11: (2) } S_{10} - S_4 = \frac{1023}{1024} - \frac{15}{16} = \frac{1023 - 960}{1024} = \frac{63}{1024}.$$

师:在这里, 我发现有一些同学写的是 $S_{10} - S_5$, 那么到底是哪一个呢?

生 12: 黑板上的这个, 因为包括第 5 项.

$$\text{生 13: } S_{10} - S_4 = \frac{\frac{1}{32}[1 - (\frac{1}{2})^6]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{1024}.$$

$$\text{生 14: (3) } S_{\text{偶}} = \frac{\frac{1}{4}[1 - (\frac{1}{4})^n]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n}.$$

$$\text{生 15: (4) } S_n = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n =$$

$\frac{1023}{1024}$, 即 $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1024}$, 所以 $n = 10$. 所以, 前 10 项和为 $\frac{1023}{1024}$.

师:从这几位同学的解答过程中可以看出, 我们不仅要会用公式, 还要注意公式的逆用, 即通过解方程来求解.

5. 课堂小结, 升华提高

师:回顾这节课, 你学到了什么? (知识, 方法, 思想)

生:从知识上学了等比数列前 n 项和公式, 从方

法上学到了错位相减法.

师:错位相减法求前 n 项和时也体现了方程的思想,在公式的逆用求 n 时也体现了方程的思想.

师:那么,这三个方面,我们能不能进行更深入的挖掘呢?比如公式如何活用,有什么样的结构特征?这个错位相减法还能对怎样的数列求和呢?还有你们想到的一项变为两项相减,即裂项能求等比数列前 n 项和吗?留给大家课后继续探讨,欢迎与我交流!

结束语:(我们今天主要围绕两个等式:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \times [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2 - (\frac{1}{2})^{n-1} \rightarrow 2 (\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2}$$

$$= 2^n - 1 \rightarrow +\infty (\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时}).$$

观察两个等式,可以体会一个道理:每天进步一点点,我们的未来可以预知,但是只有我们今天比昨天更努力,我们的未来才能创造奇迹!

三、教学思考与启示

1. 教学思考

对于不同层次的学生,要采用不同的教学方法.针对 A 班这种学生学习水平较高、接受能力、探究能力与独立思考能力较强的班级,老师采用了探究启发式的教学方法,全程引导学生独立思考、探索,从而让学生自己得到等比数列前 n 项和的公式;而针对有一定思考能力且接受能力较强的学生,要基于定义,进一步引导、拓展,从中传递方程思想与递推思想,并启发学生用“错位相减法”来进行公式推导,让学生切身体会公式的发现过程;针对独立思考能力较弱的班级,要从创设情境激活学生兴趣,到用“错位相减法”推导出等比数列前 n 项和公式,再进行练习巩固,而不进行其他方法的赘述,这样才能充分考虑到学生的认知特点,从而让学生消化所学知识.

这位教师通过引导学生来推导等比数列求和公式的过程中采用了不同的推导方法,我们可以发现这些方法的本质:无论何种方法最终都可以回到“错位相减法”,而不论何种程度的学生在学习过程中最终常用的也是“错位相减法”.

2. 教学启示

(1) 教学要从学生出发

在教学中,学生是主体,教学的出发点和立足点都应该是学生.每个学生都有不同的个性,为了打造高效的数学课堂,教师要深入、全面、细致地了解学生的数学知识层次和水平,以此作为高效课堂创设的保障.要考虑到学生的年龄特点、认知水平等因素,实现高效的数学教学.依据新课标来看,教师要从每一个学生的实际情况出发,将传道、授业与解惑相结合,创新教学方式,促进课堂教学质量的提高.教学计划要遵循适度的基本原则,不可制定得过高,也不可过低.教学目标只有在学生可以完成的范围之内,才能提高学生数学学习的自信,培养学生的热情,从而提高数学教学质量.

教学设计最终是为学生服务的,而学生原有的认知水平、认知结构以及接受能力都会因人而异.对于水平相对弱一些的学生,如果把课堂交给他们,让他们自己去探索、发现知识,可能会有一些困难,很难实现最优化教学.因此,这样的学生更适合传统的讲授式教学,这不但能让他们在尽可能短的时间内掌握最基本的知识,而且通过强化,能帮助他们加深对知识的记忆.针对接受能力不算优秀的学生,在教学过程中,往往将简单易处理的问题留给学生讨论,而有一定难度的题则由教师进行讲解.

(2) 认真研读、解读教材

教材是一个宝库,教材,顾名思义,就是教学材料.从狭义来说,教材是指根据一定学科的任务,编选和组织具有一定范围和深度的知识、技能的体系,一般以教科书的形式来体现.教材又是学生学习的重要资源,它不仅决定课堂教学内容,而且提供了教学活动的基本线索和方法.那么,在新课程下高中数学教师应该如何研读教材呢?

首先,要树立整体观念.从教材的整体入手通读教材,了解教材的编排意图,弄清每部分教材在整个体系中的地位和作用,用联系、发展的观点,分析处理教材.而具体到一节课的教学内容,先要阅读例题、解答习题,要注意把握教材内容的实质,提炼教材的重点和难点,仔细揣摩教材中提出的问题等,要善于思考,多问自己几个为什么,如教材都呈现了哪些内容,为什么要这样呈现,根据教材内容准备设计哪些相关的数学活动,通过这些数学活动要解决哪些问题,达到什么目的;要学会走出自我,学会换位思考.如:要从编者的角度,从自我解读的角度,从学生学习的角度,从他人评价的角度等方面予以思考.同时,交流和讨论是研读教材过程中必不可少的环

节,可以和教研组的老师们共议,也可以和教研组长或教研员商议.在“议”中使思维发生碰撞,相互启发,取长补短,共同提高.

其次,要学会活用教材.教育家叶圣陶说:“教材只能作为教课的依据,要教得好,使学生受益,还要靠教师善于运用.”新课程无论在课程设置上还是在课程内容及教材编排方式上的更新,都给教师提供了广阔的创造空间.当教材中呈现的问题情境与学生生活实际相差较远时,教师可以将其换成学生熟悉的事物;当教材提供的学习内容、数据信息等与本班学生实际状况有差距时,教师可以做适当调整;当教材安排的课时对本班学生来说过快或过慢时,教师可以结合本班实际调整自己的教学进度.当然,这些调整与变动是建立在对教材的研究以及对学生的了解的基础之上的.

总之,教学时教师既要基于教材、钻研教材,充分挖掘教材所蕴涵的教育因素,有效、合理地使用教材,又不能拘泥于教材,受教材的过度束缚,要充分发挥自身的主导作用,利用广泛的教学资源,活用教材,实现教材的再创造与二次开发.只有这样,我们的数学课堂教学才会更扎实、更具灵魂!

(3) 以教学目标为向导

船在一望无际的海洋上行驶的时候总有一个方向,教学也是如此,而这个方向就是教学目标,指引着我们在教学的过程中不至迷失,尤其是数学这种逻辑性较强的学科,更需要一盏明灯指引着前进.教师在授课之前一定要明确一堂课或一学年的教学目标.教学目标是引导教学活动有序进行的一项行为指标,可以说是检验教学质量的重要依据,有了目标,才能达到一定的教学效果.数学文化从古至今历经了上千年的时间洗礼,是时代文明的积淀,在很大程度上对创造力与生产力都产生了不可忽视的影响.数学,间接性地促进了人类逻辑思维的演变,推动了社会的进步与发展.在教育改革过程中,教师要把普通高中数学教学目标定位为深化教学内容、完善教学结构、改进教学模式,把数学与生活深刻地联系起来,借助数学培养学生的思维逻辑能力,让学生感受到数学的深刻意义.在明确教学目标的同时,教师要合理地拟定一份教学计划,让数学教学活动在教学计划的引导下有序进行.

在教学过程中,一定要把三维目标紧紧地融合在一起,教学就像“过河”,在“现有的知识”与“拓展的知识”之间横着一条河,而教学就是帮助学生从

“现有的知识”渡到“拓展的知识”的过程,对于教师来说,过河的目的就是要达到教学目标.在这个过程中,绝对不能错误地引导学生.

(4) 教学重点是教思维

教师在教学中要培养学生思考问题的能力,可以说,数学教学中渗透的数学基本思维,是学习数学基础知识的灵魂和精髓,是对数学问题的本质反映.老师在教学过程中追求的是“授人以渔”,让学生掌握学习数学知识的“金钥匙”,也是数学知识发展的杠杆.数学思维较之于数学基础知识及其常用的数学方法又处于更高层次,在运用数学基础知识及方法处理数学问题时具有指导性的地位,因此这也是我们在数学教学中所追求的.当然,我们也不能贬低数学方法的重要性,在教学过程中要努力将思维与方法结合起来,使“方法”上升到“思想”的境界,将思想、方法融会贯通,渗透在平时的每一节数学教学中.

高中数学作为一门主要的学科,不仅起到传授数学知识的作用,还起着重要思维能力培养的作用,教育界正在进行着改革与变化,传统的数学教学方法已经不能够满足新课程标准的要求,为了响应素质教育与新课程改革的要求,教师应该创新自己的教学方式,创造高效课堂教学,将高效课堂的核心思维训练很好地实践,培养学生的思维能力,促进学生的全面发展.

参考文献:

- [1] 史宁中. 数学基本思想 18 讲[M]. 北京:北京师范大学出版社,2016:1-316.
- [2] 王光明,冯虹,康玥媛. 新理念数学教学技能训练[M]. 北京:北京大学出版社,2014:1-246.
- [3] 张景斌. 数学教师语言技能的探讨[J]. 首都师范大学学报(社会科学版),1994,3(98):105-108.
- [4] 谢晨,胡惠闵. 学情分析中“学情”的理解[J]. 全球教育展望,2015,2:20-26.
- [5] 安桂清. 论学情分析与教学过程的整合[J]. 当代教育科学,2013,22:40-42.
- [6] 李青林,彭树德. 精心设计,打造“三活”课堂——“等比数列的前 n 项和”课堂实录及课后反思[J]. 中国数学教育,2018(8).

(收稿日期:20180-11-05)