

参考答案

一. 选择题:

1. B. 2. B. 3. C. 4. A. 5. C. 6. D. 7. A. 8. A. 9. D. 10. C. 11. B. 12. C.

二. 填空题:

13. 4 14. $[-4, 2)$ 15. 3 16. $[1, +\infty)$

三. 解答题:

17. (第(1)问5分、第(2)问5分)

解: (1) $A = [-3, 2], B = [m-2, m+4]$,2分

$\because A \cup B = B, \therefore A \subseteq B$, 即 $\begin{cases} m-2 \leq -3 \\ m+4 \geq 2 \end{cases}$,

$\therefore -2 \leq m \leq -1$5分

(2) 法一: $\because A \cap B \neq \emptyset, \therefore -3 \leq 4+m \leq 2$ 或 $-3 \leq m-2 \leq 2$, 即 $-7 \leq m \leq 4$10分

法二: 当 $A \cap B = \emptyset$ 时, $4+m < -3$ 或 $m-2 > 2$ 解得 $m < -7$ 或 $m > 4$,

于是 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, 即 $-7 \leq m \leq 4$10分

18. (第(1)问6分、第(2)问6分)

解: (1) 依题意, $A=2, T=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi=\frac{2\pi}{\omega}, \omega=2$,3分

故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

将点 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ 的坐标代入函数的解析式可得 $\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=1$,4分

则 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 又 $|\varphi| < \pi$, 故 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,

故函数解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$6分

(2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 时, $-\frac{\pi}{3} \leq 2x-\frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$,

则 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \leq 1, -\sqrt{3} \leq 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \leq 2$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$12分

19. (第(1)问5分、第(2)问7分)

解: (1) 由条件得 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\frac{1}{7}$, 即 $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\frac{1}{7}$

所以 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{1}{7}$, 故 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$5分

$$(2) \because 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}, \therefore \alpha - \beta \in (0, \frac{\pi}{2}) \because \cos \alpha = \frac{1}{7}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \dots\dots 9 \text{分}$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin[\alpha - (\alpha - \beta)] = \sin \alpha \cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{13}{14} - \frac{1}{7} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots 11 \text{分} \because \beta \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore \beta = \frac{\pi}{3} \dots\dots 12 \text{分} \end{aligned}$$

20. (第(1)问5分、第(2)问7分)

解: (1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中, $OB=25$, $\angle B=90^\circ$, $\angle BOE=\alpha$, $\therefore OE=\frac{25}{\cos \alpha}$.

在 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中, $OA=25$, $\angle A=90^\circ$, $\angle AFO=\alpha$, $\therefore OF=\frac{25}{\sin \alpha}$.

又 $\angle EOF=90^\circ$,

$$\therefore EF = \sqrt{OE^2 + OF^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{\cos \alpha}\right)^2 + \left(\frac{25}{\sin \alpha}\right)^2} = \frac{25}{\cos \alpha \sin \alpha},$$

$$\therefore l = OE + OF + EF = \frac{25}{\cos \alpha} + \frac{25}{\sin \alpha} + \frac{25}{\cos \alpha \sin \alpha},$$

$$\text{即 } l = \frac{25(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha \sin \alpha}. \dots\dots 4 \text{分}$$

当点 F 在点 D 时, 这时角 α 最小, 求得此时 $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

当点 E 在 C 点时, 这时角 α 最大, 求得此时 $\alpha = \frac{\pi}{3}$. 故此函数的定义域为 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. $\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 由题意知, 要求建设总费用最低, 只要求 $\triangle OEF$ 的周长 l 的最小值即可.

$$\text{由 (1) 得, } l = \frac{25(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha \sin \alpha}, \alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$$

$$\text{设 } \sin \alpha + \cos \alpha = t, \text{ 则 } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2},$$

$$\therefore l = \frac{25(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{25(t+1)}{\frac{t^2-1}{2}} = \frac{50}{t-1} \dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{由, } \frac{5\pi}{12} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{12}, \text{ 得 } \frac{\sqrt{3}+1}{2} \leq t \leq \sqrt{2}, \therefore \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t-1 \leq \sqrt{2}-1,$$

$$\text{从而 } \sqrt{2}+1 \leq \frac{1}{t-1} \leq \sqrt{3}+1,$$

$$\text{当 } \alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ 即 } BE=25 \text{ 时, } l_{\min} = 50(\sqrt{2}+1), \dots\dots 11 \text{分}$$

所以当 $BE=AF=25$ 米时, 铺路总费用最低, 最低总费用为 $200000(\sqrt{2}+1)$ 元. $\dots\dots 12 \text{分}$

21. (第(1)问2分、第(2)问10分)

解: (1) 由已知可得 $A(-\frac{b}{k}, 0), B(0, b)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (\frac{b}{k}, b)$,

又因为 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} = (\frac{1}{2}, 1)$, 所以 $\frac{b}{k} = \frac{1}{2}, b = 1$. 所以 $k = 2, b = 1$ 2分

(2) 由(1)知, $f(x) \geq g(x)$ 即 $2x^2 - x - 4 \leq 2x + 1$,

即 $(2x-5)(x+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$4分

$h(x) = g(x) + ax = 2x^2 + (a-1)x - 4$, 对称轴为 $x = \frac{1-a}{4}$,

①当 $\frac{1-a}{4} \leq -1$ 即 $a \geq 5$ 时, $h(x)$ 在 $[-1, \frac{5}{2}]$ 上单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(-1) = -a - 1$.

②当 $-1 < \frac{1-a}{4} < \frac{5}{2}$ 即 $-9 < a < 5$ 时, $h(x)$ 在 $x = \frac{1-a}{4}$ 处取得最小值,

所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1-a}{4}) = -\frac{(1-a)^2}{8} - 4$.

③当 $\frac{1-a}{4} \geq \frac{5}{2}$ 即 $a \leq -9$ 时, $h(x)$ 在 $[-1, \frac{5}{2}]$ 上单调递减, 所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}a + 6$

综上所述, 当 $a \geq 5$ 时, $h(x)_{\min} = -a - 1$; 当 $-9 < a < 5$ 时, $h(x)_{\min} = -\frac{(1-a)^2}{8} - 4$;

当 $a \leq -9$ 时, $h(x)_{\min} = \frac{5}{2}a + 6$ 12分

22. (第(1)问2分、第(2)问2分、第(3)问8分)

解: (1) $f_1(x) = x$ 不是 “ (a, b) 型函数”, 因为不存在实数对 (a, b) 使得 $(a+x) \cdot (a-x) = b$,

即 $a^2 - x^2 = b$ 对定义域中的每一个 x 都成立;2分

(2) 由 $4^{a+x} \cdot 4^{a-x} = b$, 得 $16^a = b$, 所以存在实数对,

如 $a = 1, b = 16$, 使得 $f_1(a+x) \cdot f_1(a-x) = b$ 对任意的 $x \in R$ 都成立;4分

(3) 由题意得, $g(1+x)g(1-x) = 4$, 所以当 $x \in [1, 2]$ 时, $g(x) = \frac{4}{g(2-x)}$, 其中 $2-x \in [0, 1]$, 而

$x \in [0, 1]$ 时, $g(x) = x^2 + m(1-x) + 1 = x^2 - mx + m + 1$, 其对称轴方程为 $x = \frac{m}{2}$.

①当 $\frac{m}{2} > 1$, 即 $m > 2$ 时, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 $[g(1), g(0)]$, 即 $[2, m+1]$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上

的值域为 $[2, m+1] \cup [\frac{4}{m+1}, 2] = [\frac{4}{m+1}, m+1]$, 由题意得 $\begin{cases} m+1 \leq 4 \\ \frac{4}{m+1} \geq 1 \end{cases}$, 从而 $2 < m \leq 3$;7分

②当 $\frac{1}{2} \leq \frac{m}{2} \leq 1$, 即 $1 \leq m \leq 2$ 时, $g(x)$ 的值域为 $[g(\frac{m}{2}), g(0)]$, 即 $[m+1-\frac{m^2}{4}, m+1]$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上

的值域为 $[m+1-\frac{m^2}{4}, m+1] \cup [\frac{4}{m+1}, \frac{4}{m+1-\frac{m^2}{4}}]$, 则由题意, 得
$$\begin{cases} \frac{4}{m+1-\frac{m^2}{4}} \leq 4 \\ m+1-\frac{m^2}{4} \leq 4 \end{cases}$$

且
$$\begin{cases} m+1-\frac{m^2}{4} \geq 1 \\ \frac{4}{m+1} \geq 1 \end{cases}, \text{解得 } 1 \leq m \leq 2; \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

③当 $0 < \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2}$, 即 $0 < m \leq 1$ 时, $g(x)$ 的值域为 $[g(\frac{m}{2}), g(1)]$, 即 $[m+1-\frac{m^2}{4}, 2]$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的值

域为 $[m+1-\frac{m^2}{4}, 2] \cup [2, \frac{4}{m+1-\frac{m^2}{4}}]$, 即 $[m+1-\frac{m^2}{4}, \frac{4}{m+1-\frac{m^2}{4}}]$, 则

$$\begin{cases} m+1-\frac{m^2}{4} \geq 1 \\ \frac{4}{m+1-\frac{m^2}{4}} \leq 4 \end{cases}, \quad \text{解得 } 0 < m \leq 1 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述, 所求 m 的取值范围是 $0 < m \leq 3 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$