

追求深度学习的高三数学课堂实践与思考^①

——以“离散型随机变量分布列、期望与方差”复习课为例

伍春兰¹ 许绮菲²

(1. 北京教育学院数学系 100120; 2. 北京市第一七一中学 100013)

1 问题提出

高三数学复习,很多老师以任务重、时间紧、学生差为由,让学生长时间、高密度、低思维地刷题,选题考题做题讲题成为课堂常态.可各种的题海之术,各样的“严防死磕”,效益并不高,令师生苦不堪言.

实践表明,盲目大量做题,缺少高阶思维的浅层学习,既不利学生成绩的提高,也有害身心的健康,更无助核心素养的发展.我们认为学生的深度学习,可以减轻重负低效的复习现状.

深度学习可以追溯到 20 世纪 50 年代,布卢姆(Bloom)等人将认知维度从低到高分六层:识记(Knowledge)、理解(Comprehension)、应用(Application)、分析(Analysis)、综合(Synthesis)和评价(Evaluation),体现了学习的深浅^[1]. 美国学者 Ference Marton 和 Roger Saljo 设计了学生阅读的实验,针对两种相对立的学习方式,借鉴布卢姆认知维度层次理论,于 1976 年首创了深度学习(Deep Learning)和浅层学习(Surface Learning)概念^[2]. 随后,深度学习得到不少学者的进一步研究和发展.我国学者 2012 年前后开始关注深度学习,研究成果逐年上升.迄今,深度学习的认识并不统一,但就深度学习认知层面上的理解,基本达成一致.即,按照布卢姆认知领域学习目标分类,浅层学习的认知水平只停留在“识记、理解”;而深度学习的认知水平则对应“应用、分析、评价、创造”^[3].

我们主张的学生深度学习的数学教学,就是学生以主动积极的情感,将思维特别是高阶思维

贯穿到数学学习过程的始终,不仅关注知识技能“是什么”“怎样用”,还要探究知识技能的来龙去脉,逐步养成思维参与学习的自觉意识.

下面以 2019 年第五届北京市示范性高中同课异构教学研讨会的“离散型随机变量分布列、期望与方差”复习课为例,探求高三数学复习课学生深度学习的可行路径.

2 前期分析

2.1 前测:了解学情

2.1.1 前测设计

本节课的学习者为北京市某示范校高三年级中等水平学生,共计 29 名.借班上课的教师,课前访谈该班任课教师,得知:学生已经复习了概率与统计主线相关内容,大部分学生在高二学习时对于一些概念没有深入理解,没有建立起对该部分知识的完整结构,因而在高三复习过程中他们期待对单元知识的全面梳理、系统建构和实践指导.

为进一步了解学生“离散型随机变量分布列、期望与方差”现有状态,特命制考查知识点相对单一的 A 卷(共 13 个小题),及需要对该部分知识总结、比较、区别、评论的 B 卷(共 2 个大题). B 卷题 1 出自 2016—2017 年北京市西城区高三年级第一次模拟考试数学理科试卷第 17 题,该题以试题难度为背景,考察用样本估计总体的离散程度,以及离散程度参数的统计含义的理解(图 1);题 2 选自 2018—2019 年北京市海淀区高三年级第二次模拟考试数学理科试卷第 16 题,该题以某快餐连锁店招聘外卖骑手为背景,考察用样本估计总体的集中趋势,以及集中趋势参数的统计含

① 北京教育学院 2019—2021 年卓越教师工作室“基于核心素养的学生思维培养的数学教学研究”成果.

义的理解. 两题都需要学生从大段文字中提取相关信息, 利用学过的有关知识, 用统计与概率的视角分析、解决问题.

1. 在测试中, 客观题难度的计算公式为 $P_i = \frac{R_i}{N}$, 其中 P_i 为第 i 题的难度, R_i 为答对该题的人数, N 为参加测试的总人数.

现对某校高三年级 240 名学生进行一次测试, 共 5 道客观题. 测试前根据对学生的了解, 预估了每道题的难度, 如下表所示:

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后, 随机抽取了 20 名学生的答题数据进行统计, 结果如下:

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	16	16	14	14	4

(I) 根据题中数据, 估计这 240 名学生中第 5 题的实测答对人数;

(II) 从抽样的 20 名学生中随机抽取 2 名学生, 记这 2 名学生中第 5 题答对的人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 试题的预估难度和实测难度之间会有偏差. 设 P'_i 为第 i 题的实测难度, 请用 P_i 和 P'_i 设计一个统计量, 并制定一个标准来判断本次测试对难度的预估是否合理.

图 1 前测 B 卷题 1

2.1.2 结果分析

(1) A 卷测试统计结果(图 2)表明, 知识点相对单一, 只需简单描述、记忆、复制知识的题目, 学生完成得较好.

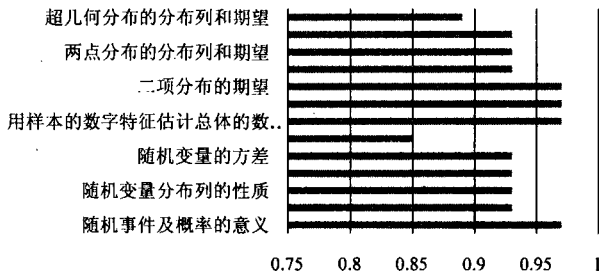


图 2 前测 A 卷统计结果

(2) B 卷两题的第二问, 正确率各为 70% 及 84%(图 3), 原因之一就是部分学生超几何分布和二项分布概率模型混淆. 比如, 有两名学生试

卷显示, 在两种概率分布模型中徘徊后, 选择了超几何模型. 部分学生对不同概率模型的适用情境分辨不清, 因此也无法选择恰当模型求解. 两题的第三问, 正确率仅各为 28% 及 46%(图 3), 说明大部分学生不能区分呈现材料的相关与无关部分及重要与次要部分, 不能准确确定呈现材料背后的观点, 倾向或意图.

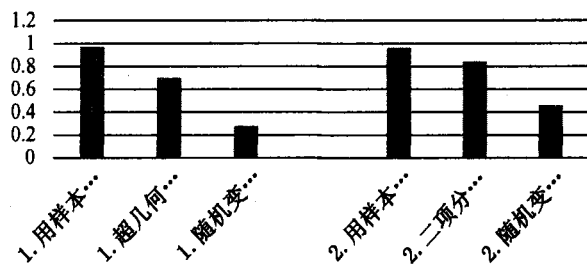


图 3 前测 B 卷统计结果

总之, 在具体问题情境中, 学生基本上能读懂可视化表格呈现的数据, 会简单地判断或推断, 解决简单问题尚可. 如前测 A 卷除去第 6 题(正确率 85%)及第 13 题(正确率 89%)外, 正确率均在 90% 以上; 前测 B 卷两个题目第一问, 正确率分别达到 97% 与 96%. 但是大部分学生把多个信息恰当联系使用困难, 不同数据表示形式之间的灵活转换不及, 所解读到的数据信息清晰表达以及推断不足, 对不恰当的数据处理或说法主动提出质疑不够, 灵活选用理论或实验的途径解决概率问题欠缺.

2.2 教法: 深度学习

教师访谈和学生调研, 发现了学生学习困惑, 以此确定了 3 个教学任务.

任务 1 以 B 卷题 1 第二问的学生解答为情境, 期望帮助学生辨别、区分超几何分布及二项分布概率模型的适用情境, 选择恰当模型求解. 其教学流程是: 感性判断—回忆提取—解释举例—比较—区分—检查. 任务 2 以 B 卷题 1 第三问的学生解答为资源, 通过生生、师生对话交流, 区分呈现材料的相关与无关部分及重要与次要部分, 确定呈现材料背后的观点, 倾向或意图; 尝试判断、评论, 初步获得自主复习的能力. 其教学流程是: 感性认知—推断总结—区别—组织—实施—检查评论. 任务 3 课下研究并完善 B 卷题 2 解答, 达成巩固复习效果、累积活动经验, 及提升思考水平的目标.

3 片断回顾

3.1 迷失概念(misconception)的转化

迷失概念是概念偏离科学性或产生迁移(应用)障碍的一种现象. 利用前测 B 卷第二问两位学生的错答和正答(图 4), 针对学生超几何分布与二项分布概率模型的迷失, 设计了问题情境与递进的 4 个问题(图 5).

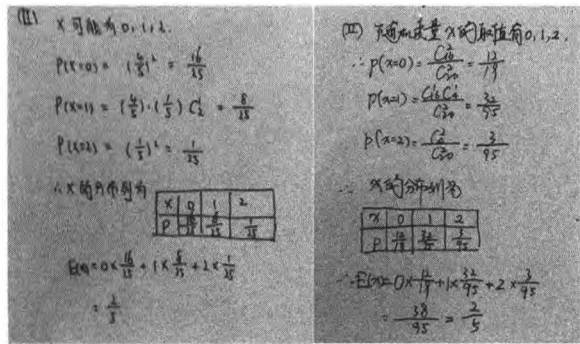


图 4 B 卷题 1 第二问两位学生的错答和正答

问题情境: B 卷第 1 题第二问, 图 4 中哪位同学作答是正确的? 为什么?

问题 1: 请同学们从记忆中提取超几何分布及二项分布两个概率模型的相关信息, 用语言描述或举例.

问题 2: 超几何分布及二项分布两个概率模型的适用情境有何区别?

问题 3: 依照上述回顾, 再理性审视同伴作答图片, 给予评判.

问题 4: 如何修改第二问的设问就可以利用二项分布模型求解?

图 5 任务一情境与问题

3.1.1 诱导思考

以同伴的作答为情境, 点燃了学生的内驱力, 因为多数学生都没有十足的把握区分两种不同概率模型. 无论是否做对, 学生都渴求知道“为什么”. 此时学生完全沉浸在两个概率模型的探究中, 思维被激活.

3.1.2 由浅及深

学生 L(先选择二项分布概率模型计算, 后划掉, 再利用超几何模型计算者), 回顾解题过程时说: 开始只是直觉, 后再看题目(20 人中选取 2 人), 觉得应该用超几何模型计算. 但无法进一步解释, 其他同学也没有更好地补充. 于是教师逐次抛出问题 1 至问题 4(图 5).

学生 Z(图 4 错答者)积极要求回答问题 3,

“图 4 中右侧答案正确, 因为超几何分布是不放回抽取, 二项分布是有放回抽取(独立重复); 计算超几何分布中事件 $\{X=k\}$ 发生的概率时需要知道总体的容量; 当总体容量非常大时, 超几何分布近似于二项分布.”看到学生脸上洋溢的收获的喜悦, 教师也由衷的夸奖: “你把老师要说的话都说了”.

师生在课堂活动中建立积极、友善的心理环境, 提升学习兴趣和积极的情感体验. 学生通过回忆提取、解释举例、区分辨别, 评价创造等思维活动, 实现了超几何分布与二项分布概率模型这一组迷失概念的转化.

3.2 高阶思维(higher-order thinking)的发展

教师以 B 卷题 1 第三问的学生 C 作答(图 6)为情境, 两次引导学生判断、评论. 第一次评议时, 教师适时提出问题: 能否体会 C 同学的统计量设置的想法? 这个统计量的设置是否能体现样本数字特征, 为决策提供依据? 在思维碰撞中, 学生对于“方差”在结构中的合适位置与作用, 对于设置更能反映样本数字特征的统计量有了进一步认识, 同时有了探究试题预估难度标准的诉求. 在学生合作得出评分标准后, 教师第二次引导学生评议学生 C 的“作品”.

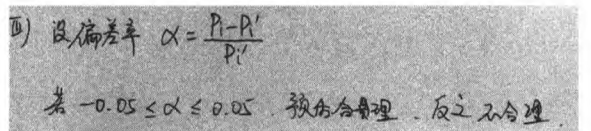


图 6 B 卷题 1 第三问学生 C 的作答

学生 C 的分享得到老师、同学充分肯定后, 也对自己作答进行了反思: 我做法的问题是没有对试卷整体合理性做出评价, 如果加上“若 5 个题目都预估合理, 则整张试卷预估合理”就可以了. 教师及时点评: 我认同你的统计量设置思路和刚才的修正, 统计思想与确定性思想, 归纳推断与演绎证明存在差异, 我们寻求更科学的统计结果为决策提供依据.

在此基础上, 教师进一步追问: 如果把评价标准改为“若 $\sum_{i=1}^5 \alpha_i \in [-2.5, 2.5]$, 则预估合理”是否可以? 大部分学生能够很快联想到已评判过的学生作答, 认为这个标准会产生各题偏差率的正负抵消, 不够合理. 继而, 进一步追问如何改进……

4 回顾启示

4.1 复习教学的定位

提升解题能力需要累积活动经验,需要融会贯通、举一反三,而缺少思考的大量重复练习的复习课,很难担此重任. 因此复习要设计有思维含量的活动,组织、引导和激励学生实现数学的深度学习:构建知识结构;拓展知识技能;感悟思想方法;提升学习能力;发展核心素养.

4.2 学生调研的利用

前期调研,不仅暴露了学生部分问题,也成为教学的真正起点. 前测 B 卷,密切联系学生生活和现实生活,半开放题型具有挑战性又在学生最近发展区内,使学生愿意卷入其中. 通过查阅标准答案、借助于学习软件等方法,学生无法判断自己的作答是否正确,他们希冀得到教师与学习同伴的帮助. 利用 B 卷题 1 的学生作答,引发学生思维冲突,教师的适度跟进与点拨,使学生学习过程中思维高度参与.

4.3 交流水平的提升

学会数学地交流是我国数学教育的重要课程目标之一,是深度学习的体现. Kimberly Hufferd-Ackles 等学者从问题的提出、数学思考的阐述、数学观点的来源、学习的责任,就学习共同体中师生的参与程度,划分了数学交流的 4 个

水平(0 级—3 级)^[4]. 本节课数学交流处于较高水平(2 级),即教师将学生的错误生成为学习资源,持续地以探究性和开放性的问题促进学生的思考与交流,支持学生暴露自己的所思所想,深入地了解学生的思维,进而采用相应策略以加深学生对知识的理解;学生则分享、解释、澄清自己的想法和策略,其他学生认真倾听以相互理解,并在结对交流和全班讨论中实现深度学习.

在教学实践中,引导学生会学数学,会用数学的眼光观察、数学的思维分析、数学的语言表达,将数学核心素养的培养贯穿于教学活动的全过程,这是我们为之努力的方向.

参考文献

- [1]洛林·W·安德森等. 布卢姆教育目标分类学:分类学视野下的学与教及其测评(修订版)[M]. 蒋小平,等译. 北京:外语教学与研究出版社,2009:70—80
- [2]Marton F, Saljo R. On Qualitative Difference in Learning: Outcome and Process[J]. British Journal of Educational Psychology, 1976 (46):4—11
- [3]安富海. 促进深度学习的课堂教学策略研究[J]. 课程·教材·教法,2014,34(11):57—62
- [4]Hufferd-Ackles, K., Fuson, K., and Sherin, M. G. Describing levels and components of a math-talk community[J]. Journal for Research Mathematics Education, 2004, 35(2):81—116

(上接第 4 页)

后鸡蛋很多,但是卖不出去,这就说明干部虽然想的好,但是没有想到山里鸡蛋的销路. 也就是说,人们总是只看一步,没有多看几步. 其实不仅生活中的问题涉及到数学思维,政治决策中也涉及这种数学思维. 据报道,某地政府有一次建楼房,建了好多套,结果却销售不出去,为什么呢? 因为很多基础设施如学校、医院、商店附近都没有. 简单一句话就是日常生活中要多看几步,虽然不是数学,但这是一种数学思维.

总之在数学教学中,数学教师要把数学的重要性解释出来. 社会也要花力量去认识“数学的重要性”. 从上一轮课程改革就开始强调数学的三个维度:知识与能力,过程与方法,情感态度价值观. 但是,如果数学知识掌握不好,情感态度价值观就是空谈. 学习数学知识总是讲究技巧,反而数学思维没理解,所以首先严先生强调数学的

“来龙去脉”,数学不仅仅是知识点,我们更应该了解数学是怎样来的? 数学问题是怎样来的? 要解决什么问题? 为了解决问题需要什么方法. 其次,严先生认为上次数学教育改革的过程并没有结束,核心素养的培养是以后的重点. 我们现在的弱点还是国家的数学水平,这方面要急于努力. 最后严先生觉得目前迫切需要解决的是提升数学在我国文化传统中的地位. 学的人把数学当做技术,社会上就会当做技术,而数学对于民族的整个发展、对于国家的实力、对于人的培养等都是有帮助的,技术的训练远比对于人民素养的培养更容易些. 如果在社会上数学重要性被承认的不多,基础数学的研究就很难有所突破,所以我们的数学教育任重而道远.

参考文献

- [1]丘成桐,刘克峰,季理真. 数学与数学人——纪念陈省身先生文集[M]. 杭州:浙江大学出版社,2005