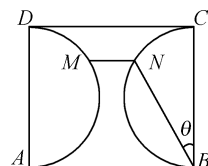


微切口 25 以三角为背景的应用问题

例1 (2019·通州、海门、启东期末)如图(1),某公园内有一块矩形绿地区域 $ABCD$, 已知 $AB=100$ m, $BC=80$ m, 以 AD , BC 为直径的两个半圆内种花草, 其它区域种植苗木. 现决定在绿地区域内修建由直路 BN , MN 和弧形路 MD 三部分组成的观赏道路, 其中直路 MN 与绿地区域边界 AB 平行, 直路为水泥路面, 其工程造价为 $2a$ 元/m, 弧形路为鹅卵石路面, 其工程造价为 $3a$ 元/m, 修建的总造价为 W 元, 设 $\angle NBC=\theta$.

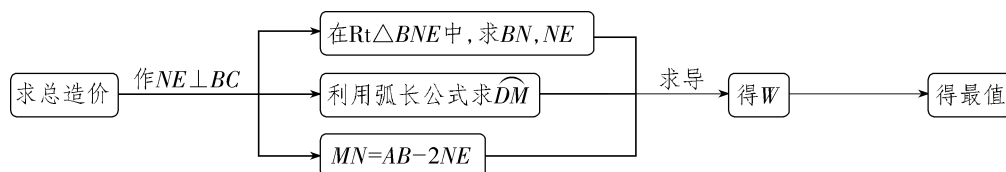


(例 1(1))

(1) 求 W 关于 θ 的函数关系式;

(2) 如何修建道路, 可使修建的总造价最低? 并求最低总造价.

【思维引导】



【解答】(1) 如图(2), 连接 NC , AM , 设 AD 的中点为 Q , 连接 MQ , 过点 N 作 $EN \perp BC$, 垂足为 E .

由 BC 为直径知, $\angle BNC=90^\circ$, 又 $BC=80$, $\angle NBC=\theta$,

所以 $BN=80 \cos \theta$, $NE=BN \sin \theta=80 \sin \theta \cos \theta$.

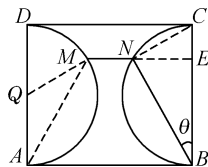
因为 $MN \parallel AB$, $AB=100$, 所以 $MN=AB-2NE=100-160 \sin \theta \cos \theta$,

又 $\angle DQM=2\angle MAD=2\theta$, $QM=40$, 所以 $\widehat{DM}=40 \times 2\theta=80\theta$.

因为直路的工程造价为 $2a$ 元/m, 弧形路的工程造价为 $3a$ 元/m, 所以总造价为

$$\begin{aligned} W &= 2a(BN + MN) + 3a \widehat{DM} \\ &= 2a(80 \cos \theta + 100 - 160 \sin \theta \cos \theta) + 3a \cdot 80\theta \\ &= 40a(4 \cos \theta - 8 \sin \theta \cos \theta + 6\theta + 5) \\ &= 40a(4 \cos \theta - 4 \sin 2\theta + 6\theta + 5) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

所以 W 关于 θ 的函数关系式为 $W=40a(4 \cos \theta - 8 \sin \theta \cos \theta + 6\theta + 5) \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.



(例 1(2))

(2) 设 $f(\theta)=4 \cos \theta - 8 \sin \theta \cos \theta + 6\theta + 5$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

则 $f'(\theta)=-4 \sin \theta - 8 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta + 6$

$=16 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 2$

$=2(4 \sin \theta + 1)(2 \sin \theta - 1)$.

令 $f'(\theta)=0$, 得 $\theta=\frac{\pi}{6}$,

当 θ 变化时, $f'(\theta), f(\theta)$ 的变化情况如下表:

θ	$(0, \frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$	-	0	+
$f(\theta)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, 当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 取得最小值.

此时, 总造价 W 最低, 且最低总造价为 $(200+40\pi)a$ 元.

答: (1) W 关于 θ 的函数关系式为 $W=40a(4\cos\theta-8\sin\theta\cos\theta+60+5)$ ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$);

(2) 当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时, 修建的总造价最低, 且最低总造价为 $(200+40\pi)a$ 元.

变式 (2019·南方凤凰台密题) 如图(1), 一艘走私船从港口 A 沿正东方向行驶, 在港口 A 北偏东 60° 方向距离 $30\sqrt{3}$ n mile 处有一艘缉私艇, 走私船行驶了 1 小时 45 分钟后缉私艇获得情报, 立即沿南偏东 30° 的方向追缉. 当两船首次相距 5 n mile 时, 走私船发现缉私艇后立即调头沿原路返回, 缉私艇相应调整方向继续追缉 (两船改变方向时间不计). 已知走私船每小时行驶 20 n mile, 缉私艇每小时行驶 25 n mile.

(1) 问: 走私船从出发到发现缉私艇共行驶多少海里?

(2) 当走私船返回时, 缉私艇沿南偏西 θ 方向行驶可在最短时间内追上走私船, 求 $\sin\theta$ 的值.

【解答】 (1) 记走私船到达点 C 时发现缉私艇, 此时缉私艇到达点 D,

如图(2), 延长 BD, AC 交于点 F,

由题意知 $\angle BAF=30^\circ$, $\angle ABF=90^\circ$,

所以 $BF=AB\tan 30^\circ=30$ n mile, $AF=\frac{AB}{\cos 30^\circ}=60$ n mile.

设缉私艇行驶 t h, 则 $BD=25t$ n mile, $AC=20\left(t+\frac{7}{4}\right)$ n mile,

在 $\triangle DCF$ 中, $\angle DFC=60^\circ$,

$DF=30-25t=5(6-5t)$ n mile, $CF=60-20\left(t+\frac{7}{4}\right)=5(5-4t)$ n mile.

由余弦定理得 $DC^2=CF^2+DF^2-2CF\cdot DF\cos\angle CFD$,

则 $25(6-5t)^2+25(5-4t)^2-25(6-5t)(5-4t)=25$,

解得 $t=1\left(t=\frac{10}{7}\text{舍去}\right)$, 此时 $AC=55$ n mile.

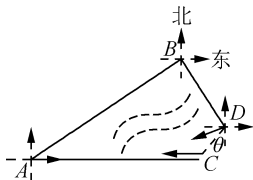
(2) 设缉私艇调整方向后经过 x h 后在点 E 处追上走私船,

则 $DE=25x$ n mile, $CE=20x$ n mile,

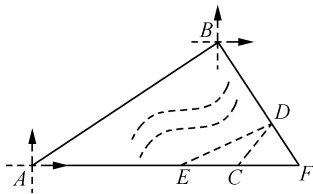
由(1)可知, $\triangle DCF$ 是等边三角形, 所以 $\angle DCE=120^\circ$,

由正弦定理得 $\frac{CE}{\sin\angle CDE}=\frac{DE}{\sin\angle DCE}$,

即 $\frac{20x}{\sin\angle CDE}=\frac{25x}{\sin 120^\circ}$,



(变式(1))



(变式(2))

$$\text{所以 } \sin \angle CDE = \frac{2\sqrt{3}}{5}, \cos \angle CDE = \sqrt{1 - \sin^2 \angle CDE} = \frac{\sqrt{13}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sin(\angle CDE + 30^\circ)$$

$$= \sin \angle CDE \cos 30^\circ + \cos \angle CDE \sin 30^\circ = \frac{6 + \sqrt{13}}{10}.$$

答:(1) 走私船从出发到发现缉私艇共行驶 55 n mile;

(2) 当走私船返回时,若缉私艇沿南偏西 θ 方向行驶可在最短时间内追上走私船,此时 $\sin \theta = \frac{6 + \sqrt{13}}{10}$.

◀ 归纳总结 ▶

1. 与解三角形有关的应用题常见的两种情形:一是实际问题经抽象概括后,已知量与未知量全部集中在一个三角形中,可用正弦定理或余弦定理求解;二是实际问题经抽象概括后,已知量与未知量涉及两个或两个以上三角形,这时需要作出这些三角形,然后逐步求解其他三角形,有时需设出未知量,从几个三角形中列出方程(组),解方程(组)得出所要的解.

2. 当用正、余弦定理去解决具体的实际问题时,应关注图形的特点,找出已知量及所求的量,转化为三角形的边角,再利用正弦、余弦定理构造方程或三角函数式,运用求导或不等式的性质寻找最值.