江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 3

一、填空题

1. 已知复数 $z=\left(2-i\right)^2$ （i 为虚数单位），则 z 的共轭复数为____________.

2. 从 2 个白球，2 个红球，1 个黄球这 5 个球中随机取出两个球，则取出的两球中恰有一个红球的概率是_______.

3. 若双曲线 $x^2+my^2=1$ 过点 $\left(-\sqrt{2},2\right)$，则该双曲线的虚轴长为_________.

4. 如图是一个算法的伪代码，运行后输出 b 的值为_______.

```
a ← 0
b ← 1
I ← 2
While  I ≤ 6
  a ← a + b
  b ← a + b
  I ← I + 2
End  While
Print  b
```

（第 4 题）

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=m$ 相切，相邻切点之间的距离为 π． 若点 $A(x_0,y_0)$ 是 $y=f(x)$ 图象的一个对称中心，且 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$， 则 $x_0=$_____.

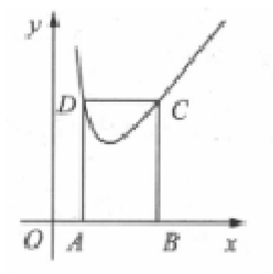
6. ΔABC 中，$AC=4,BC=3,\angle ACB=60^0$，$E$ 为边 AC 中点，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$， 则 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的值为______.

7. 在体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=1$，$BC=2$，$BD=3$，则 CD 长度的所有值为_______.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $P\left(-2,0\right)$ 的直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于点 T，与圆 $\left(x-a\right)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$ 相交于点 R,S，且 $PT=RS$，则正数 a 的值为________.

9. 已知函数 $f(x)=x^3+2x$，若 $f(1)+f(\log_{\frac{1}{a}}3)>0$ （$a>0$ 且 $a\neq1$），则实数 a 的取值范围是____________.

10. 如图，矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上，顶点 C,D 在函数 $y=x+\frac{1}{x}\left(x>0\right)$ 的图像上. 记 $AB=m,BC=n$，则 $\frac{m}{n^2}$ 的最大值为____________.



二、解答题

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点分别是 F_1，F_2，右顶点、上顶点分别为 A， B，原点 O 到直线 AB 的距离等于 ab ．

（1）若椭圆 C 的离心率等于 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，求椭圆 C 的方程；

（2）若过点 $(0,1)$ 的直线 l 与椭圆有且只有一个公共点 P，且 P 在第二象限，直线 PF_2 交 y 轴于点 Q ．试判断以 PQ 为直径的圆与点 F_1 的位置关系，并说明理由．

12. 设数列$\{a_n\}$的首项为1，前n项和为S_n，若对任意的$n \in N^*$，均有$S_n = a_{n+k} - k$（k是常数且$k \in N^*$）成立，则称数列$\{a_n\}$为"$P(k)$数列".

（1）若数列$\{a_n\}$为"$P(1)$数列"，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）是否存在数列$\{a_n\}$既是"$P(k)$数列"，也是"$P(k+2)$数列"？若存在，求出符合条件的数列$\{a_n\}$的通项公式及对应的k的值；若不存在，请说明理由；

（3）若数列$\{a_n\}$为"$P(2)$数列"，$a_2 = 2$，设$T_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}$，证明：$T_n < 3$.

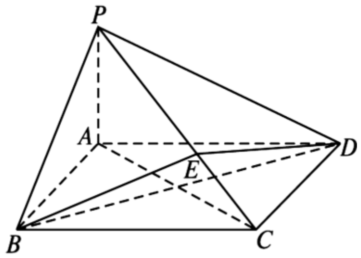
三、附加题

1 、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 5\end{bmatrix}$，列向量 $X=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

（1）求矩阵 AB；

（2）若 $B^{-1}A^{-1}X=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$，求 a， b 的值.

2．如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，点 E 在线段 PC 上，$PC\perp$平面 BDE，设 $PA=1$，$AD=2$.



(1)求平面 BPC 的法向量;

(2)求二面角 $B-PC-A$ 的正切值.

江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 3

一、填空题

1. 已知复数 $z=\left(2-i\right)^2$ （i 为虚数单位），则 z 的共轭复数为____________. $3+4i$

2. 从 2 个白球，2 个红球，1 个黄球这 5 个球中随机取出两个球，则取出的两球中恰有一个红球的概率是________. $\dfrac{3}{5}$

3. 若双曲线 $x^2+my^2=1$ 过点 $\left(-\sqrt{2},2\right)$，则该双曲线的虚轴长为__________. 4

4. 如图是一个算法的伪代码，运行后输出 b 的值为________. 13

```
a ← 0
b ← 1
I ← 2
While  I ≤ 6
  a ← a + b
  b ← a + b
  I ← I + 2
End  While
Print  b
```

（第 4 题）

5. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=m$ 相切，相邻切点之间的距离为 π. 若点 $A(x_0,y_0)$ 是 $y=f(x)$ 图象的一个对称中心，且 $x_0\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，则 $x_0=$______. $\dfrac{5\pi}{12}$

6. ΔABC 中，$AC=4,BC=3,\angle ACB=60^0$，$E$ 为边 AC 中点，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的值为_______. -4

7. 在体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=1$，$BC=2$，$BD=3$，则 CD 长度的所有值为________.

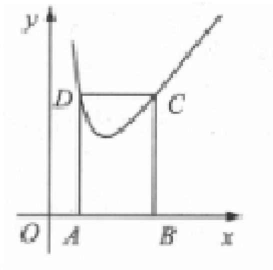
$\sqrt{7}$ 或 $\sqrt{19}$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $P\left(-2,0\right)$ 的直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于点 T，与圆 $\left(x-a\right)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$ 相交于点 R,S，且 $PT=RS$，则正数 a 的值为_________. 4

9. 已知函数 $f(x)=x^3+2x$，若 $f(1)+f(\log_{\frac{1}{a}}3)>0$ （$a>0$ 且 $a\neq1$），则实数 a 的取值范围

是____________.　　　$(0,1)\cup(3,+\infty)$

10. 如图，矩形$ABCD$的边AB在x轴上，顶点C,D在函数$y=x+\frac{1}{x}\left(x>0\right)$的图像上. 记$AB=m,BC=n$，则$\frac{m}{n^2}$的最大值为____________.　$\frac{1}{4}$



二、解答题

11. 在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别是$F_1$，$F_2$，右顶点、上顶点分别为$A$，$B$，原点$O$到直线$AB$的距离等于$ab$．

（1）若椭圆C的离心率等于$\frac{\sqrt{6}}{3}$，求椭圆C的方程;

（2）若过点$(0,1)$的直线l与椭圆有且只有一个公共点P，且P在第二象限，直线PF_2交y轴于点Q．试判断以PQ为直径的圆与点F_1的位置关系，并说明理由．

解：由题意，得点$A(a,0)$，$B(0,b)$，直线AB的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即$ax+by-ab=0$．

由题设，得$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=ab$，化简，得$a^2+b^2=1$．①　　　　…………2 分

（1）∵ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴ $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，即 $a^2=3b^2$. ②

由①②，解得 $\begin{cases} a^2=\frac{3}{4}, \\ b^2=\frac{1}{4} \end{cases}$. …………5 分

所以，椭圆 C 的方程为 $\frac{4x^2}{3}+4y^2=1$. …………6 分

（2）点 F_1 在以 PQ 为直径的圆上 .

由题设，直线 l 与椭圆相切且 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为： $y=kx+1$，

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=kx+1 \end{cases}$，得 $(b^2+a^2k^2)x^2+2ka^2x+a^2-a^2b^2=0$，（*） …………8 分

则 $\Delta=(2ka^2)^2-4(b^2+a^2k^2)(a^2-a^2b^2)=0$，

化简，得 $1-b^2-a^2k^2=0$，所以， $k^2=\frac{1-b^2}{a^2}=1$ ，

∵点 P 在第二象限，∴ $k=1$. …………10 分

把 $k=1$ 代入方程（*） ，得 $x^2+2a^2x+a^4=0$，

解得 $x=-a^2$，从而 $y=b^2$，所以 $P(-a^2,b^2)$. …………11 分

从而直线 PF_2 的方程为： $y-b^2=\frac{b^2}{-a^2-c}(x+a^2)$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{b^2c}{a^2+c}$，所以点 $Q(0,\frac{b^2c}{a^2+c})$. …………12 分

从而 $\overrightarrow{F_1P}=(-a^2+c,b^2)$， $\overrightarrow{F_1Q}=(c,\frac{b^2c}{a^2+c})$， …………13 分

从而 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=c(-a^2+c)+\frac{b^4c}{a^2+c}$

$=\frac{c(-a^4+c^2+b^4)}{a^2+c}=\frac{c(-a^4+b^4+c^2)}{a^2+c}=\frac{c\left[(b^2-a^2)(b^2+a^2)+c^2\right]}{a^2+c}=0$，

又∵ $a^2+b^2=1$， $a^2=b^2+c^2$，

∴ $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=0$. …………15 分

所以点 F_1 在以 PQ 为直径的圆上 . …………16 分

12. 设数列$\{a_n\}$的首项为 1，前 n 项和为S_n，若对任意的$n\in N^*$，均有$S_n=a_{n+k}-k$（k 是常数且$k\in N^*$）成立，则称数列$\{a_n\}$为“$P(k)$数列”.

（1）若数列$\{a_n\}$为“$P(1)$数列”，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）是否存在数列$\{a_n\}$既是“$P(k)$数列”，也是“$P(k+2)$数列”？若存在，求出符合条件的数列$\{a_n\}$的通项公式及对应的 k 的值；若不存在，请说明理由；

（3）若数列$\{a_n\}$为“$P(2)$数列”，$a_2=2$，设$T_n=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$，证明：$T_n<3$.

解：（1）数列$\{a_n\}$为“$P(1)$数列”，则$S_n=a_{n+1}-1$

故$S_{n+1}=a_{n+2}-1$，两式相减得：$a_{n+2}=2a_{n+1}$，又 n=1 时，$a_1=a_2-1$，所以$a_2=2$，

故$a_{n+1}=2a_n$对任意的$n\in N^*$恒成立，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$（常数），故数列$\{a_n\}$为等比数列，其通项公式为$a_n=2^{n-1},n\in N^*$.　　　　　　　　………4 分

（2）假设存在这样的数列$\{a_n\}$，则有$S_n=a_{n+k}-k$，故有$S_{n+1}=a_{n+k+1}-k$

两式相减得：$a_{n+1}=a_{n+k+1}-a_{n+k}$，故有$a_{n+3}=a_{n+k+3}-a_{n+k+2}$

同理由$\{a_n\}$是“$P(k+2)$数列”可得：$a_{n+1}=a_{n+k+3}-a_{n+k+2}$，

所以$a_{n+1}=a_{n+3}$对任意$n\in N^*$恒成立　　　　　　…………………………6 分

所以$S_n=a_{n+k}-k=a_{n+k+2}-k=S_{n+2}$，即$S_n=S_{n+2}$，又$S_n=a_{n+k+2}-k-2=S_{n+2}-2$，即$S_{n+2}-S_n=2$，两者矛盾，故不存在这样的数列$\{a_n\}$既是“$P(k)$数列”，也是“$P(k+2)$数列”.　　　　　　　　………10 分

（3）因为数列$\{a_n\}$为“$P(2)$数列”，所以$S_n=a_{n+2}-2$

所以$S_{n+1}=a_{n+3}-2$

故有，$a_{n+1}=a_{n+3}-a_{n+2}$，又 n=1 时，$a_1=a_3-2$，故$a_3=3$，满足：$a_3=a_2+a_1$

所以$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$对任意正整数 n 恒成立，数列的前几项为：$1,2,3,5,8,\cdots$12 分

故$T_n=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{8}{2^5}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$

所以，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^n}+\frac{a_n}{2^{n+1}}$

两式相减得：

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n+1}}$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}T_{n-2}-\frac{a_n}{2^{n+1}}$，显然$T_{n-2}<T_n,\frac{a_n}{2^{n+1}}>0$，故$\frac{1}{2}T_n<\frac{3}{4}+\frac{1}{4}T_n$，即$T_n<3$．………16 分

三、附加题

1 、已知矩阵$A=\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2\\0&5\end{bmatrix}$，列向量$X=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

（1）求矩阵AB；

（2）若$B^{-1}A^{-1}X=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$，求$a$，$b$的值.

解:（1）$AB=\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&8\\0&5\end{bmatrix}$；………………………………………………………5 分

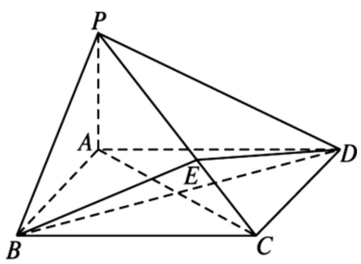
（2）由$B^{-1}A^{-1}X=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$，解得$X=AB\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&8\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28\\5\end{bmatrix}$，又因为$X=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，所以

$a=28$，$b=5$.…………………………………………………………10 分

2．如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，PA⊥平面$ABCD$，点E在线段PC上，PC⊥平面BDE，设$PA=1$，$AD=2$.

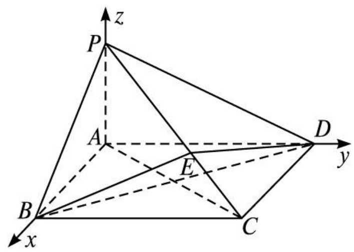
(1)求平面BPC的法向量;

(2)求二面角$B-PC-A$的正切值.



以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别作为 x、y、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

如图所示．设 $AB=b$，则：



$A(0,0,0)$，$B(b,0,0)$，$C(b,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,1)$．

(1)因为 $\overrightarrow{PC}=(b,2,-1)$，$\overrightarrow{DB}=(b,-2,0)$．

易证得 $BD\perp$ 平面 PAC，从而 $PC\perp DB$，……………2 分

所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{DB}=b^2-4=0$，

从而 $b=2$．结合(1)可得 $\overrightarrow{DB}=(2,-2,0)$，……………4 分

是平面 APC 的法向量．

现设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 BPC 的法向量，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PC}$，即 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0$．

因为 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-1)$，

所以 $2y=0, 2x-z=0$．

取 $x=1$，则 $z=2$，$\boldsymbol{n}=(1,0,2)$．　　　　　……………6 分

令 $\theta=\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DB}\rangle$，则

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，……………8 分

$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta=3$．

由图可得二面角 $B-PC-A$ 的正切值为 3．……………10 分