山东中学联盟2021年高考考前热身押题

数学试题

2021.5

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．集合 $A=\left\{(x,y)\middle|y=kx+1,k\in R\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=2\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为（　　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

2．复数 $a=\dfrac{1+3i}{1+i}$ 的虚部是（　　）

A．1　　B．i　　C．-1　　D．2

3．在 $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，含 x^4 项的系数为（　　）

A．160　　B．192　　C．184　　D．186

4．已知 $a=\ln\dfrac{1}{2020}+\dfrac{2019}{2020}$，$b=\ln\dfrac{1}{2021}+\dfrac{2020}{2021}$，$c=\ln\dfrac{1}{2022}+\dfrac{2021}{2022}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

5．已知向量 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OP}$ 的模长均为2，且满足 $2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{19}{2}$　　B．$\dfrac{23}{2}$　　C．$\dfrac{21}{2}$　　D．5

6．已知直线 $ax+by+c=0$ 过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则（　　）

A．$a^2+b^2\le 1$　　B．$a^2+b^2\ge 1$　　C．$a^2+b^2\le c^2$　　D．$a^2+b^2\ge c^2$

7．若 x，$y\in R$，$x>0$，求 $(x-y)^2+\left(4\ln x-x^2-2y-1\right)^2$ 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{16}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

8．为迎接第 24 届冬季奥林匹克运动会，某校安排甲、乙、丙、丁、戊共五名学生担任冰球、冰壶和短道速滑三个项目的志愿者，每个比赛项目至少安排 1 人．则学生甲不会被安排到冰球比赛项目做志愿者的概率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分。有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．下列说法正确的是（　　）

A．若 $3^a=4^b=12$，则 $a+b>4$

B．“$a=1$”是“直线 $ax+y-1=0$ 与直线 $ax+\left(a-2\right)y+5=0$ 垂直”的充分条件

C．已知回归直线方程 $y=2x+\hat{a}$，且 $\overline{x}=5$，$\overline{y}=20$，则 $\hat{a}=15$

D．函数 $f\left(x\right)=\left|\cos 4x\right|$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，所得函数图象关于原点对称

10．已知函数 $f\left(x\right)=\sin x\left(\sin x-\cos x\right)$，下列叙述不正确的是（　　）

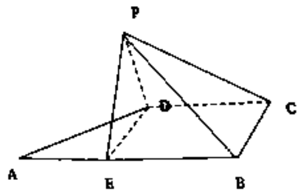
A．$f\left(x\right)$ 的最小正周期是 2π　　B．$f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递增

C．$f\left(x\right)$ 图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称　　D．$f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{1}{2}\right)$ 对称

11．已知抛物线 M：$y^2=4x$，圆 N：$\left(x-1\right)^2+y^2=r^2\left(r>0\right)$，过点 $\left(1,0\right)$ 的直线 l 与圆 N 交于 C，D 两点，交抛物线 M 于 A，B 两点，则满足 $\left|AC\right|=\left|BD\right|$ 的直线 l 有三条的 r 的值有（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

12．如图，直角梯形 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$BC=CD=\frac{1}{2}AB=4$，E 为 AB 中点，以 DE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起，使点 A 到达点 P 的位置，则（　　）



A． $EB \perp$ 平面 PED

B．若 $PE \perp EB$ 时，棱锥 $P-BCD$ 的外接球体积为 $32\sqrt{3}\pi$

C． PC 的最大值为 $4\sqrt{3}$

D．二面角 $C-PE-B$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知等比数列 $\{a_n\}$， $m \in N_+$，满足 $a_2^2 \cdot a_m = a_{675}^3$，则 m 的值为______.

14．目前，全国已经有八省市确定实行选考模式，除语文、数学、英语必考外，还需要从物理、化学、生物、政治、历史、地理这六科中再选三科，某校甲、乙、丙、丁四位同学分别从化学、生物、历史、地理四门课程中各选一门课程，且所选课程互不相同，下面是关于他们选课的些信息：

①甲和丙均不选地理，也不选生物：

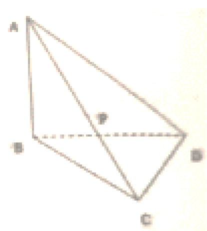
②乙不选生物，也不选历史：

③如果甲不选历史，那么丁就不选生物，

若以上信息都是正确的，则依据以上信息可推断丙同学所选的课程是______.

15．已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$BC=8$，BD 是 AC 边上的中线，且 $\angle CBD=30°$，则 BD 的长为______.

16．在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑．在鳖臑 $A-BCD$ 中， $AB \perp$ 平面 BCD， $BD \perp CD$， $AB=BD=CD=2$，点 P 在棱 AC 上运动．则 $\triangle PBD$ 面积的最小值为______.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分） $\{a_n\}$ 为正项等差数列， $S_3=21$， $a_1a_2a_3=280$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足：$\log_2 b_n = \dfrac{a_n+2}{3}$，求 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.

18.（12 分）锐角$\triangle ABC$内角A，B，C的对边分别为a，b，c．已知$2b-a=2c\cdot\cos A$．

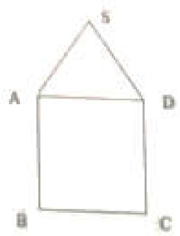
（1）求角C；

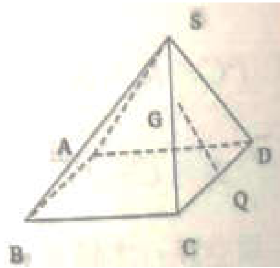
（2）若$a+b=4$，求边c的取值范围．

19.（12 分）在平面图形$SABCD$中，四边形$ABCD$是边长为 2 的正方形，$SA=SD$，将$\triangle SAD$沿直线AD折起，使得平面SAD垂直于平面$ABCD$，G是$\triangle SAD$的重心，Q是DC的中点，直线GQ与平面$ABCD$所成角的正切值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．

（1）求棱锥$S-ABCD$的体积；

（2）求平面SAB与平面SCD所成的角．





20.（12 分）$\triangle ABC$中，已知$B\left(-\sqrt{2},0\right)$，$C\left(\sqrt{2},0\right)$，$AD\perp BC$交$BC$于点$D$，$H$为$AD$中点，满足$BH\perp AC$，点$H$的轨迹为曲线$C$．

（1）求曲线C的方程；

（2）过点$M\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$作直线$l$交曲线$C$于$P$，$Q$两点，求证：以$PQ$为直径的圆恒过定点，

21.（12 分）

某零件加工工厂生产某种型号的零件，每盒 10 个，每批生产若干盒，每个零件的成本为 1 元，每盒零件需要检验合格后方可出厂．检验方案是从每盒零件中随机取出 2 个零件检验，若发现次品，就要把该盒 10 个零件全部检验，然后用合格品替换掉次品，方可出厂；若无次品，则认定该盒零件合格，不再检验，可出厂．

（1）若某盒零件有 8 个合格品，2 个次品，求该盒零件一次检验即可出厂的概率；

（2）若每个零件售价 10 元，每个零件检验费用是 1 元．次品到达组装工厂被发现后，每个零件须由加工工厂退赔 10 元，并补偿 1 个经检验合格的零件给组装工厂．设每个零件是次品的概率是$p\left(0<p<1\right)$，且相互独立．

①若某盒 10 个零件中恰有 3 个次品的概率是$f\left(p\right)$，求$f\left(p\right)$的最大值点p_0；

②若以①中的 p_0 作为 p 的值，由于质检员的失误，有一盒零件未经检验就被贴上合格标签出厂到组装工厂，求这盒零件最终利润 X（单位：元）的期望.

22.（12 分）函数 $f\left(x\right)=\sin x-ax+1$，

（1）$a=\frac{1}{2}$，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间;

（2）若 $f\left(x\right)\geq\cos x$ 在 $x\in\left[0,\pi\right]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围;

（3）令函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+ax-1$，

求证：$g\left(\frac{\pi}{15}\right)+g\left(\frac{2\pi}{15}\right)+g\left(\frac{3\pi}{15}\right)+\cdots+g\left(\frac{8\pi}{15}\right)\geq\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

山东中学联盟2021年高考考前热身押题

数学试题详细解析

2021.05

一、单选题

1-8　BABACDCB

二、多选题

9．AB　　10．ABC　　11．BCD　　12．BD

三、填空题

13．2021　　14．化学　　15．$2\sqrt{3}$　　16．$\sqrt{2}$

1．答案B：直线 $y=kx+1$ 恒过定点 $M\left(0,1\right)$，点 $M\left(0,1\right)$ 在圆 $x^2+y^2=2$ 内，所以直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 有两个交点．集合 $A\cap B$ 有两个元素．

2．答案：A

$$z=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{\left(1+3i\right)\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)}=\frac{1-i+3i-3i^2}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$$，虚部是1．

3．答案：B

$$T_{r+1}=C_6^r\left(2x\right)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r2^{6-r}x^{6-2r}$$，$r=0$，1，2，3，4，5，6

当 $r=1$ 时，$T_2=C_6^12^5x^4=192x^4$．

4．答案：A

构造函数 $f\left(x\right)=\ln x+1-x$，$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单增，所以

$f\left(\frac{1}{2020}\right)>f\left(\frac{1}{2021}\right)>f\left(\frac{1}{2022}\right)$，$a>b>c$．

5．答案：C

$\because 2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=-3\overrightarrow{OP}$，$\therefore 4\left(\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{ON}\right|^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\right)=9\times4$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}$，

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP}\right)=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

$=\frac{1}{2}-\overrightarrow{OP}\cdot\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}\right)+4=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times 4+4=\frac{21}{2}$.

6．答案：D

点M是单位圆$x^2+y^2=1$的点，所以直线$ax+by=1$和圆$x^2+y^2=1$有公共点．$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1$，即得到$a^2+b^2\ge c^2$．

7．答案：C

问题可以转化为：$A\left(x,4\ln x-x^2\right)$是函数$y=4\ln x-x^2$图象上的点，$B\left(y,2y+1\right)$是函数$y=2x+1$上的点，$|AB|^2=(x-y)^2+\left(4\ln x-x^2-2y-1\right)^2$．当直线$y=2x+1$的平行直线与$f\left(x\right)$的图象相切时，切点到直线$y=2x+1$的距离为$|AB|$的最小值．

$$f'\left(x\right)=\frac{4}{x}-2x=\frac{4-2x^2}{x}=\frac{2\left(\sqrt{2}+x\right)\left(\sqrt{2}-x\right)}{x}$$

可得到$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{2}\right)$单增，$\left(\sqrt{2},+\infty\right)$单减，$f_{\max}\left(x\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=2\ln 2-2<0$，从而可以得到$f\left(x\right)$的图象．设斜率为2的直线与$f\left(x\right)$的图象相切，切点为$M\left(t,f\left(t\right)\right)$，由$f'\left(t\right)=2$，得到$t=1$，$f\left(1\right)=-1$，$M\left(1,-1\right)$到直线$y=2x+1$的距离即为$|AB|$的最小值．

$|AB|_{\min}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，$|AB|_{\min}^2=\frac{16}{5}$．

8．答案：B

所有的安排方法$C_5^3A_3^3+C_5^1\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_3^3=10\times 6+5\times 3\times 6=150$，若只有1人去冰球项目做志愿者，有$C_4^1\left(C_4^1+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)A_2^2=4\times\left(4+3\right)\times 2=56$；若恰有2人去冰球项目做志愿者，有$C_4^2C_3^1A_2^2=6\times 3\times 2=36$；若有3人去冰球项目做志愿者，有$C_4^3A_2^2=4\times 2=8$，所以共有$56+36+8=100$种安排法，所以学生甲不会被安排到冰球比赛项目做志愿者的概率为$\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$．

9．答案：AB

A．$a=\log_3 12$，$\frac{1}{a}=\log_{12}3$，$\frac{1}{b}=\log_{12}4$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，$a>0$，$b>0$，$a\ne b$，

$\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>4$；

B．两直线垂直，可得$a^2+\left(a-2\right)=0$，解得$a=1$或$a=-2$；

C．回归直线一定过样本中心点，$\overline{y}=2\overline{x}+\hat{a}$，$\hat{a}=20-2\times 5=10$；

D．$f\left(x\right)=\left|\cos 4x\right|\to y=\left|\cos 4\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right|=\left|\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\sin 4x\right|$，偶函数．

10、答案：ABC

$f\left(x\right)=\sin x\left(\sin x-\cos x\right)=\sin^2 x-\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以 A 不对；

令$x\in\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，$t=2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin t$单调递增，$f\left(x\right)$单减．B 不对；

$x=\frac{\pi}{4}$时，$f\left(x\right)$不是最大值或最小值，所以 C 不对；

函数$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$关于点$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称，$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},\frac{1}{2}\right)$ 对称，D 正确．

11．答案 BCD

当直线l斜率不存在时，直线方程为：$x=1$与抛物线交于点$\left(1,\pm 2\right)$，与圆交于点$\left(1,\pm r\right)$，显然满足条件；

当直线斜率存在时，设直线方程为$x=my+1\left(m\neq 0\right)$，

由$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$，设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$y_1<y_2$，有韦达定理可得$y_1+y_2=4m$，

$y_1y_2=-4$，$\left(y_1-y_2\right)^2=\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2=16\left(m^2+1\right)$

由$\begin{cases}x=my+1\\ \left(x-1\right)^2+y^2=r^2\end{cases}$，$y=\pm\sqrt{\frac{r^2}{m^2+1}}$

设$C\left(x_3,y_3\right)$，$D\left(x_4,y_4\right)$，$y_3<y_4$，$\left(y_3-y_4\right)^2=\frac{4r^2}{m^2+1}$，

有$\left|AC\right|=\left|BD\right|$，$\left|y_3-y_1\right|=\left|y_4-y_2\right|$，

当$y_3-y_1=-\left(y_4-y_2\right)$时，即$y_3+y_4=y_1+y_2=0$，又因为$y_1+y_2=4m$，所以$m=0$（舍）

当$y_3-y_1=y_4-y_2$时，即$y_2-y_1=y_4-y_3$，

因为$\left(y_1-y_2\right)^2=\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2=16\left(m^2+1\right)$，$\left(y_3-y_4\right)^2=\dfrac{4r^2}{m^2+1}$，

由此，$16\left(m^2+1\right)=\dfrac{4r^2}{m^2+1}$，解得$r=2\left(m^2+1\right)$，

显然，当$r>2$，m有两解，对应直线有两条．$r=2$，$m=0$，此时直线斜率不存在，即为第一种情况，所以当$r\geq 2$时，对应直线l有三条．

12．答案：BD

$EB\perp ED$，EB与PE不一定垂直，所以A不对；

若$PE\perp EB$，则可证明$PE\perp$平面$DEBC$，$DEBC$为正方形，棱锥$P-BCD$可以补成边长为4的正方体，外接球直径等于正方体的体对角线长，即$2R=4\sqrt{3}$，$R=2\sqrt{3}$，$V=\dfrac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^3=32\sqrt{3}\pi$，B正确；

若$PE\perp EB$，则可证明$PE\perp$平面$DEBC$，此时$PC=4\sqrt{3}$，若$\angle PEC$为钝角，由余弦定理可得$PC>4\sqrt{3}$，C不正确；

由$DE\perp PE$，$DE\perp EB$，$PE\cap EB=E$，所以$DE\perp$平面PEB，从而$CB\perp$平面PEB，$CB\perp PE$作$BQ\perp PE$，交PE于点Q，可证$PE\perp$平面CQB，则$CQ\perp PE$，所以二面角$C-PE-B$的平面角是$\angle CQB$，$\tan\angle CQB=\dfrac{CB}{BQ}=\dfrac{4}{BQ}$，满足$BQ\perp PE$的$BQ$的最大长度为4，所以$\tan\angle CQB$的最小值为1，即二面角$C-PE-B$的最小值为$\dfrac{\pi}{4}$．

13．答案：2021

设首项a_1，公比是q，则$a_n=a_1q^{n-1}$，

所以$\left(a_1q\right)^2\cdot a_1q^{m-1}=\left(a_1q^{674}\right)^3$，$q^{1+m}=q^{2022}$，$m=2021$．

14．答案：化学

由信息①可知甲丙选的是化学和历史；由信息②可知，乙选择化学或地理．

当甲选化学，丙选历史时，乙选地理，丁选生物，此时与③矛盾；

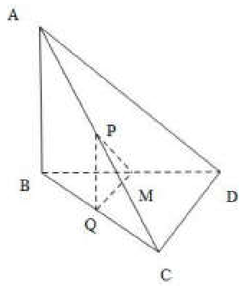
当甲选历史，丙选化学时，乙选地理，丁选生物，符合．

15．答案：$2\sqrt{3}$

延长 BD 至 E，使得 $BD=ED$，得到平行四边形 $ABCE$．在三角形 BCE 中，$BC=8$，$EC=4$，$\angle CBD=30°$，由正弦定理可得 $\angle BEC=90°$．

$BE=2BD=4\sqrt{3}$，$BD=2\sqrt{3}$

16．答案：$\sqrt{2}$



答案：如图，作 $PQ\perp BC$ 于点 Q，作 $QM\perp BD$，交 BD 于点 M，连接 PM．得到 $PQ//AB$，$QM//CD$，

$PQ\perp$ 平面 BCD，$PQ\perp BD$，$QM\perp BD$，所以 $PM\perp BD$．

设 $CQ=x$，$CB=2\sqrt{2}$，由 $\frac{PQ}{AB}=\frac{CQ}{CB}\Rightarrow\frac{PQ}{2}=\frac{x}{2\sqrt{2}}$，得到 $PQ=\frac{x}{\sqrt{2}},0\le x\le 2\sqrt{2}$，

在 $\triangle BCD$ 中，$\frac{BQ}{BC}=\frac{QM}{CD}\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}}=\frac{QM}{2}$，得到，$QM=\frac{2\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$，

$$PM=\sqrt{PQ^2+QM^2}=\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{\left(8-4\sqrt{2}x+x^2\right)}{2}}=\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+4}=\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+2}\ge\sqrt{2}，$$

当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时，等号成立．

$$S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}BD\cdot PM\ge\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}．$$

17．答案：（1）$\because S_3=a_1+a_2+a_3=21$，$\therefore a_2=7$

设数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d，可得 $7(7-d)(7+d)=280$，$d>0$，$d=3$

$\therefore a_n=a_2+3(n-2)=3n+1$．

（2）$\log_2 b_n=\frac{a_n+2}{3}=\frac{3n+1+2}{3}=n+1$，$b_n=2^{n+1}$，

设 $c_n=a_n\cdot b_n$，设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$c_n=(3n+1)2^{n+1}$

$T_n = 4\cdot 2^2 + 7\cdot 2^3 + 10\cdot 2^4 + \cdots + (3n+1)2^{n+1}$

$2T_n = 4\cdot 2^3 + 7\cdot 2^4 + \cdots + (3n-2)2^{n+1} + (3n+1)^{n+2}$，

两式子作差，得到

$-T_n = 16 + 3\left(2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1}\right) - (3n+1)2^{n+2}$

$= 16 + 3\cdot 2^{n+2} - 24 - (3n+1)2^{n+2}$

$T_n = (3n-2)2^{n+2} + 8$

18．答案：（1）因为 $2b - a = 2c\cdot\cos A$，由正弦定理可得

$2\sin B - \sin A = 2\sin C\cos A$，

$2\sin\left[\pi - (A+C)\right] - \sin A = 2\sin C\cos A$，

$2\sin(A+C) - \sin A = 2\sin C\cos A$

展开可得：$2\sin A\cos C + 2\sin C\cos A - \sin A = 2\sin C\cos A$

得到：$2\sin A\cos C - \sin A = 0$

因为 $\sin A \neq 0$，所以 $\cos C = \frac{1}{2}$，C 是锐角，所以 $C = \frac{\pi}{3}$，

（2）由正弦定理

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c$，可得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin A$，$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin B$

所以 $\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin A + \frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin B = 4$，得 $c = \frac{2\sqrt{3}}{\sin A + \sin B}$

因为锐角 $\triangle ABC$，所以 $0 < C = \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}$，$0 < A < \frac{\pi}{2}$，得到 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$，

$\therefore \sin A + \sin B = \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{3}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$

$= \sqrt{3}\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$

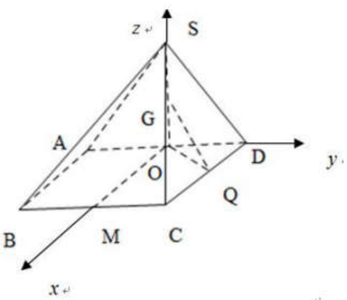
因为 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$，$\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$，

所以$c=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin A+\sin B}\in\left[2,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

19．答案：延长SG与AD相交于点O，则O一定是AD的中点．易得$SO\perp AD$，$GO\perp AD$．因为平面SAD垂直于平面$ABCD$，两个平面的交线是AD，所以得到$SO\perp$平面$ABCD$，GQ在平面$ABCD$的射影是OQ，所以直线GQ与平面$ABCD$所成的角是$\angle GQO$在直角三角形GQO中，$OQ=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，

$\tan\angle GQO=\dfrac{OG}{OQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，解得$OG=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$SO=3OG=\sqrt{3}$，$SA=2$，

$V_{S-ABCD}=\dfrac{1}{3}SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 2\times 2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．



（2）法一：取BC的中点M，连接OM，以点O为原点，以$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OS}$的正方向为x轴，y轴，z轴的正方向建立空间直角坐标系$O-xyz$，

则$A(0,-1,0)$，$B(2,-1,0)$，$C(2,1,0)$，$D(0,1,0)$，$S(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{SA}=(0,-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{SD}=(0,1,-\sqrt{3})$，

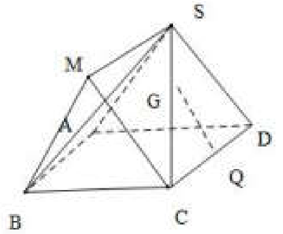
设平面SAB与平面SCD的法向量分别是$\vec{m}=(x,y,z)$，$\vec{n}=(x',y',z')$，

则$\begin{cases}2x=0\\-y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\y=-\sqrt{3}z\end{cases}$，令$z=1$，$\vec{m}=(0,-\sqrt{3},1)$，

$\begin{cases}2x'=0\\y'-\sqrt{3}z'=0\end{cases}$，$\begin{cases}x'=0\\y'=\sqrt{3}z'\end{cases}$令$z'=1$，$\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$.

设平面SAB与平面SCD所成的角为α，易知α是锐角，所以$\cos\alpha=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$，所以$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，即平面$SAB$与平面$SCD$所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$.

（2）法二：



过点 S 作 $SM//DC$， $SM=DC$，将原几何体补成三棱柱 $SAD-MBC$，

$SM//DC//AB$，因为平面 SAD 垂直于平面 $ABCD$，两个平面的交线是 AD， $AB\perp AD$，所以 AB 平面 SAD， $SM//AB$，所以 $SM\perp$ 平面 SAD.

因 SA， $SD\subset$ 平面 SAD，所以 $SA\perp SM$， $SD\perp SM$，

$SA\subset$ 平面 SAB， $SD\subset$ 平面 SAB，所以 $\angle ASD$ 即为平面 SAB 与平面 SCD 所成的角，大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

20、答案：（1）设 $H\left(x,y\right)$， $A\left(x,2y\right)$， $\overrightarrow{BH}=\left(x+\sqrt{2},y\right)$， $\overrightarrow{CA}=\left(x-\sqrt{2},2y\right)$，

因为 $BH\perp AC$，所以 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，即 $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)+2y^2=0$，

整理得： $x^2+2y^2=2$，即 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

$\triangle ABC$ 中，三顶点不可能共线，所以 $y\neq 0$，

故曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\left(y\neq 0\right)$.

（2）若直线 l 斜率不存在，可得圆： $x^2+y^2=1$，

若直线 l 斜率为 0，可得圆： $x^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$.

两个圆的公共点为 $N\left(0,-1\right)$，

若直线 l 斜率存在且不为 0 时，设其方程为 $y=kx+\dfrac{1}{3}\left(k\neq 0\right)$，

$\begin{cases} y=kx+\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，可得 $\left(2k^2+1\right)x^2+\dfrac{4}{3}kx-\dfrac{16}{9}=0$，

$\Delta>0$ 恒成立，设点 $P\left(x_1,y_1\right)$， $Q\left(x_2,y_2\right)$，

可得韦达定理：$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{4k}{6k^2+3} \\ x_1x_2=-\dfrac{16}{18k^2+9} \end{cases}$

$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=\left(x_1,y_1+1\right)\cdot\left(x_2,y_2+1\right)=x_1x_2+\left(y_1+1\right)\left(y_2+1\right)$

$=x_1x_2+\left(kx_1+\dfrac{4}{3}\right)\left(kx_2+\dfrac{4}{3}\right)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+\dfrac{4}{3}k\left(x_1+x_2\right)+\dfrac{16}{9}$

$=\dfrac{-16\left(k^2+1\right)}{18k^2+9}+\dfrac{\dfrac{4}{3}k\left(-4k\right)}{6k^2+3}+\dfrac{16}{9}$

$=\dfrac{-16k^2-16-16k^2+\dfrac{16}{9}\left(18k^2+9\right)}{18k^2+9}=0$

即 $NP\perp NQ$，以 PQ 为直径的圆经过定点 $N\left(0,-1\right)$.

综上所述，以 PQ 为直径的圆经过定点 $N\left(0,-1\right)$.

21．答案：（1）设“该盒零件一次检验即可出厂”为事件 A，

$P\left(A\right)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{\dfrac{8\times7}{2\times1}}{\dfrac{10\times9}{2\times1}}=\dfrac{28}{45}$

①某盒 10 个零件恰好有 3 个次品的概率

$f\left(p\right)=C_{10}^3p^3\left(1-p\right)^7$，

$f'\left(p\right)=C_{10}^3p^2\left(1-p\right)^6\left(3-10p\right)$

当 $0<p<\dfrac{3}{10}$，$f'\left(p\right)>0$，当 $\dfrac{3}{10}<p<1$，$f'\left(p\right)<0$

所以当 $p=\dfrac{3}{10}$ 时，$f\left(p\right)$ 取到最大值，故 $f\left(p\right)$ 的最大值点为 $p_0=\dfrac{3}{10}$.

②由题意可知 $p=p_0=\dfrac{3}{10}$，这盒零件中次品的个数为 N，

则 $N\sim B\left(10,\dfrac{3}{10}\right)$，$E\left(N\right)=10\times\dfrac{3}{10}=3$，

$E\left(X\right)=10\times10-10\times1-3\times10-3\times2=54$，

所以这盒零件最终利润的期望为 54 元.

22．答案：

（1）$a=\frac{1}{2}$，$f\left(x\right)=\sin x-\frac{1}{2}x+1$，$f'\left(x\right)=\cos x-\frac{1}{2}$

当$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$ 时，$f'\left(x\right)>0$，

当$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$ 时，$f'\left(x\right)<0$，

所以，$f\left(x\right)$的单调递增区间是$\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$，$k\in Z$．

$f\left(x\right)$的单调递减区间是$\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$，$k\in Z$．

（2）恒成立不等式等价于$ax+\cos x-\sin x-1\le0$，

令$h\left(x\right)=ax+\cos x-\sin x-1$，则由$\begin{cases}h\left(0\right)\le0\\h\left(\pi\right)\le0\\h\left(\frac{\pi}{2}\right)\le0\end{cases}$可得到$a\le\frac{2}{\pi}$

∵ $y=ax+\cos x-\sin x-1$可以看作是关于a的一次函数，单调递增，

∴令$\varphi\left(x\right)=\frac{2}{\pi}x+\cos x-\sin x-1$，

对于$\forall a\le\frac{2}{\pi}$，$\forall x\in\left[0,\pi\right]$，$h\left(x\right)\le\varphi\left(x\right)$恒成立.

只需证明$\varphi\left(x\right)=\frac{2}{\pi}x+\cos x-\sin x-1\le0$即可.

$\varphi'\left(x\right)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x=\frac{2}{\pi}-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1°当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(1,\sqrt{2}\right]$，

则$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x<\frac{2}{\pi}-1<0$，$\varphi(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，又$\varphi(x)=0$，

所以此时$\varphi(x)<0$恒成立.

2°当$x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$时，$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x=\frac{2}{\pi}-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$恒成立;

3°当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$时，$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x-\cos x=\frac{2}{\pi}-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$单调递增，

$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，$\varphi'\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0$，所以在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$上存在唯一的$x_0$，使得$\varphi'(x_0)=0$，

当$x\in(0,x_0)$时，$\varphi'(x)<0$，当$x\in(x_0,\pi)$时，$\varphi'(x)>0$，

所以$\varphi(x)$在$x\in(0,x_0)$时单调递减，在$x\in(x_0,\pi)$时单调递增.

$\therefore\varphi(0)=0$，$\varphi(\pi)=0$，$\varphi(x_0)<0$

$\therefore\varphi(x)<0$恒成立，故$h(x)\le\varphi(x)<0$恒成立，

$\therefore a\le\frac{2}{\pi}$.

（3）由（2）可知$\sin x-\cos x\ge\frac{2}{\pi}x-1\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge\frac{2}{\pi}x-1$

$\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g(x)=\sin x$，令$x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{15}$，$x=\frac{4k+15}{60}\pi$，$k=1$，2，…，8，

可得到$\sin\frac{k\pi}{15}\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{(4k+15)\pi}{60}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{60}(4k-15)$，

从而$\sum\limits_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{15}\ge\frac{\sqrt{2}}{60}\sum\limits_{k=1}^{8}(4k-15)=\frac{\sqrt{2}}{60}\left(4\times\frac{8\times(1+8)}{2}-15\times8\right)=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，

即$g\left(\frac{\pi}{15}\right)+g\left(\frac{2\pi}{15}\right)+g\left(\frac{3\pi}{15}\right)+\cdots+g\left(\frac{8\pi}{15}\right)\ge\frac{2\sqrt{2}}{5}$得证.