江苏省扬州中学高三数学 10 月考试卷

2021.10.3

一、单项选择题：（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题意要求的）

1．已知集合 A={1，2，3}，$B=\{x\in N|x\leq 2\}$，则 $A\cup B$=（　　）

A．{2，3}　　B．{0，1，2，3}　　C．{1，2}　　D．{1，2，3}

2．已知函数 $f\left(x\right)\left(x\in I\right)$，“$\forall x\in I$，$f\left(x\right)\leq 2021$”是“$f\left(x\right)$最大值为 2021”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．函数$y=sin\,2\,x$的图象经过怎样的平移变换得到函数$y=sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图像（　　）

A．向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度　　B．向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

C．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　　D．向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

4．若$\alpha=-5$，则（　　）

A．$\sin\alpha>0,\cos\alpha>0$　　B．$\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$　　C．$\sin\alpha<0,\cos\alpha>0$　　D．$\sin\alpha<0,\cos\alpha<0$

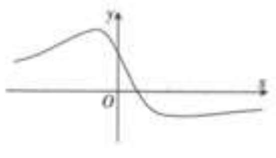
5．设 $a=e^{0.01}$，$b=\log_{\pi}e$，$c=\ln\frac{1}{\pi}$，则（　　）

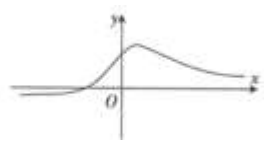
A．$a>c>b$　　B．$a>b>c$　　C．$b>a>c$　　D．$c>a>b$

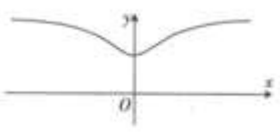
6．若$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{5}{16}$，则$\tan\alpha=$（　　）

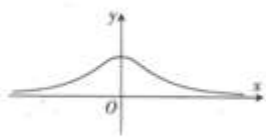
A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{2}$

7．函数 f（x）$=\frac{ax+1}{x^2+1}$的大致图象不可能是（　　）

A．

B．

C．

D．

8．设$k>0$，若存在正实数x，使得不等式$\log_{27}x-k\cdot 3^{kx-1}\geq 0$成立，则$k$的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{e\ln 3}$　　　　B．$\frac{\ln 3}{e}$　　　　C．$\frac{e}{\ln 3}$　　　　D．$\frac{\ln 3}{2}$

二．多项选择题：（本题共 4 小题,每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9．设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则（　　）

A．$y=f(x)$的最小值为$-\sqrt{2}$，其周期为π

B．$y=f(x)$的最小值为-2，其周期为$\frac{\pi}{2}$

C．$y=f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，其图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称

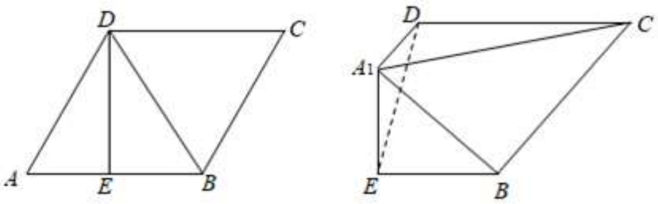
D．$y=f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递减，其图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

10．在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边，下列叙述正确的是（　　）

A．若$\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\cos A}$，则$\triangle ABC$为等腰三角形　　B．若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$sinA>cosB$

C．若$\tan A+\tan B+\tan C<0$，则$\triangle ABC$为钝角三角形　　D．若$a=b\sin C+c\cos B$，则$\angle C=\frac{\pi}{4}$

11．如图，菱形 $ABCD$ 中，AB＝2，$\angle DAB$＝60°，E 是 AB 的中点，将△ADE 沿直线 DE 翻折至△A_1DE 的位置后，连接 A_1C，A_1B. 若 F 是 A_1C 的中点，则在翻折过程中，下列说法错误的是（　　）



A．异面直线 A_1E 与 DC 所成的角不断变大　　B．二面角 A_1-DC-E 的平面角恒为 45°

C．点 F 到平面 A_1EB 的距离恒为$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．当 A_1 在平面 $EBCD$ 的投影为 E 点时，直线 A_1C 与平面 $EBCD$ 所成角最大

12．某同学对函数 $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}}$ 进行研究后，得出以下结论，其中正确的有（　　）

A．函数$y=f\left(x\right)$的图象关于 y 轴对称

B．对定义域中的任意实数x的值，恒有$|f(x)|<1$成立

C．函数$y=f\left(x\right)$的图象与x轴有无穷多个交点，且每相邻两交点间距离相等

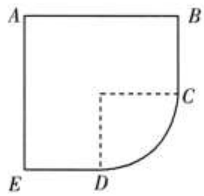
D．对任意常数$m>0$，存在常数$b>a>m$，使函数$y=f\left(x\right)$在$[a,b]$上单调递减，且$b-a\geq 1$

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．已知 tan（$\alpha-\frac{3}{4}\pi$）=$\frac{3}{4}$，则 tanα=_______.

14．在$\triangle ABC$中，已知角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$b^2+c^2-a^2=bc$　，则$A=$______,若$a=2$，则$\triangle ABC$面积的最大值为______.

15．迷你 KTV 是一类新型的娱乐设施，外形通常是由玻璃墙分隔成的类似电话亭的小房间，近几年投放在各大城市商场中，受到年轻人的欢迎．如图是某间迷你 KTV 的横截面示意图，其中 $AB=AE=\dfrac{3}{2}$，$\angle A=\angle B=\angle E=90°$，曲线段 CD 是圆心角为 $90°$ 的圆弧，设该迷你 KTV 横截面的面积为 S，周长为 L，则 $\dfrac{S}{L}$ 的最大值为_____.（本题中取 $\pi=3$ 进行计算）



16. 已知 $f(x)=e^x-e^{-x}+\sin x-x$，若 $f(a-2\ln(|x|+1))+f\left(\frac{x^2}{2}\right)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围___.

四、解答题：（本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．在△ABC中，角 A,B,C 的对边分别为a,b,c，若$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，且$a\geq b$.

（1）求角 B 的值；（2）若 $A=\dfrac{\pi}{6}$，且△ABC的面积为$4\sqrt{3}$，求 BC 边上的中线 AM 的长.

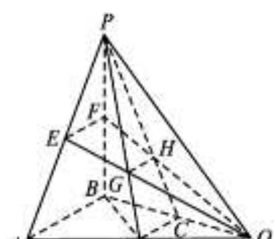
18．已知函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x+b$（$a<0$）.

（1）若当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)$ 的最大值为$\dfrac{9}{8}$，最小值为-2，求实数 a，b 的值;

（2）若 $a=-2$，$b=1$,设函数 $g(x)=m\sin x+2m$，且当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$时，$f(x)>g(x)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19．如图所示，在三棱锥 $P-ABQ$ 中，$PB\perp$平面 ABQ，$BA=BP=BQ$，D，C，E，F 分别是 AQ，BQ，AP，BP 的中点，$AQ=2BD$，PD 与 EQ 交于点 G，PC 与 FQ 交于点 H，连接 GH.

（1）求证：$AB//GH$；（2）求二面角$D-GH-Q$的余弦值.



20．某高中招聘教师，首先要对应聘者的工作经历进行评分，评分达标者进入面试，面试环节应聘者要回答3道题，第一题为教育心理学知识，答对得2分，答错得0分，后两题为学科专业知识，每道题答对得4

分，答错得0分．

（1）若一共有1000人应聘，他们的工作经历评分X服从正态分布$N\left(63,13^2\right)$，76分及以上达标，求进面试环节的人数（结果四舍五入保留整数）；

（2）某进入面试的应聘者第一题答对的概率为$\frac{3}{4}$，后两题答对的概率均为$\frac{4}{5}$，每道题正确与否互不影响，求该应聘者的面试成绩Y的分布列及数学期望．

附：若随机变量$X \sim N\left(u,\sigma^2\right)$，则$P\left(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\right)=0.6827$，$P\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right)=0.9545$，$P\left(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\right)=0.9973$．

21．已知函数$f(x)=e^x+e^{-x}$，其中e是自然对数的底数．

（1）若关于x的不等式$mf(x)\le e^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数m的取值范围；

（2）已知正数a满足：$2a>f(1)$，试比较e^{a-1}与a^{e-1}的大小，并证明你的结论．

22．设函数$f(x)=ln\,x-a(x-1)e^x$，其中$a\in R$．

（1）若$a=-1$，求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若$0<a<\frac{1}{e}$，

（ⅰ）证明：函数$f\left(x\right)$恰有两个零点；

（ⅱ）设x_0为函数$f\left(x\right)$的极值点，x_1为函数$f\left(x\right)$的零点，且$x_1>x_0$，证明：$3x_0>x_1+2$．

江苏省扬州中学高三数学 10 月考试卷参考答案

2021.10.3

1．B　2．B　3．B　4．A　5．B　6．C　7．C　8．A

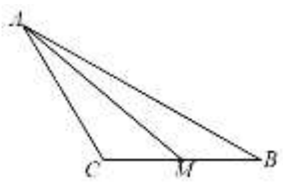
9．AD　10．BCD　11．ABD　12．ABD

13．$-\frac{1}{7}$　14．$\frac{\pi}{3},\sqrt{3}$　15．$12-3\sqrt{15}$　16．$\left[2\ln 2-\frac{1}{2},+\infty\right)$

17．（1）因为$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，由正弦定理得$\sin A\sin B\cos C+\sin C\sin B\cos A=\frac{1}{2}\sin B$，

$\because \sin B\neq 0\ \therefore \sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{1}{2}$，$\therefore \sin(A+C)=\frac{1}{2}$，$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$.又$a\geq b$，所以$0<B<\frac{\pi}{2}$，可得$B=\frac{\pi}{6}$.

（2）由（1）知$B=\frac{\pi}{6}$，若$A=\frac{\pi}{6}$，则$a=b$，$C=\frac{2\pi}{3}$，



$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{3}=4\sqrt{3}$，$\therefore a=4$，$a=-4$（舍）.

又在$\triangle AMC$中，由余弦定理得$AM^2=AC^2+MC^2-2AC\cdot MC\cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore AM^2=AC^2+\left(\frac{1}{2}AC\right)^2-2AC\cdot\frac{1}{2}AC\cos\frac{2\pi}{3}=4^2+2^2-2\times4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$，所以$AM=2\sqrt{7}$.

(或者用其它方法如向量法，正确也给全分)

18．（1）$f(x)=-2\left(\sin x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+b+1$，

∴当$-1\leqslant\frac{a}{4}<0$时，$f(x)_{\max}=\frac{a^2}{8}+b+1=\frac{9}{8}$，$f(x)_{\min}=a+b-1=-2$.解得$a=-1$或$a=9$（舍去），

∴$a=-1$，$b=0$.

当$\frac{a}{4}<-1$时，$f(x)_{\max}=-a+b-1=\frac{9}{8}$，$f(x)_{\min}=a+b-1=-2$.解得$a=-\frac{25}{16},b=\frac{9}{16}$（舍去）.

综上所述，$a=-1$，$b=0$.

（2）解法一：$f(x)=-2\sin^2 x-2\sin x+2$.

当$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时，$-2\sin^2 x-2\sin x+2>m(\sin x+2)$恒成立，

$m<\dfrac{-2\sin^2 x-2\sin x+2}{\sin x+2}$，令 $u=\sin x+2$，则$\frac{5}{2}\leqslant u\leqslant 3$.

所以 $m<6-2\left(u+\dfrac{1}{u}\right)$，由对勾函数的性质得$6-2\left(u+\frac{1}{u}\right)\geqslant -\frac{2}{3}$，所以 $m<-\dfrac{2}{3}$.

$\therefore m$ 的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$.

解法二：$f(x)=-2\sin^2 x-2\sin x+2$.

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$时，$-2\sin^2 x-2\sin x+2>m(\sin x+2)$ 恒成立，

令 $t=\sin x$，则 $h(t)=2t^2+2t+mt+2m-2$，则 $h(t)<0$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上恒成立，

则$\begin{cases}h(1)<0\\ h(\frac{1}{2})<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{2}{3}\\ m<\dfrac{1}{5}\end{cases}$，即 $m<-\dfrac{2}{3}$.$\therefore m$ 的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$.

19.（1）因为 D，C，E，F 分别是 AQ，BQ，AP，BP 的中点，

所以 $EF//AB$，$DC//AB$.所以 $EF//DC$.

又 $EF\not\subset$平面 PCD，$DC\subset$平面 PCD，所以 $EF//$ 平面 PCD.

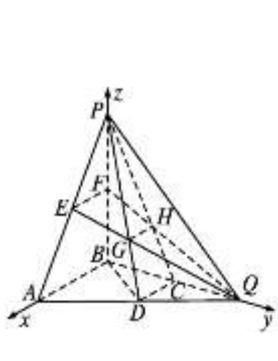
又 $EF\subset$平面 EFQ，平面 $EFQ\cap$平面 $PCD=GH$，

所以 $EF//GH$.又 $EF//AB$，所以 $AB//GH$.

（2）在$\triangle ABQ$中，$AQ=2BD$，$AD=DQ$，所以$\angle ABQ=90^\circ$.

又 $PB\perp$平面 ABQ，所以 BA，BQ，BP 两两垂直.

以 B 为坐标原点，分别以 BA，BQ，BP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $BA=BQ=BP=2$，则 $E(1,0,1)$，$F(0,0,1)$，$Q(0,2,0)$，$D(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，

$P(0,0,2)$.所以 $\overrightarrow{EQ}=(-1,2,-1)$，$\overrightarrow{FQ}=(0,2,-1)$，

$\overrightarrow{DP}=(-1,-1,2)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,2)$.

设平面 EFQ 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{EQ}=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，得 $\begin{cases}-x_1+2y_1-z_1=0,\\2y_1-z_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=1$，得 $\vec{m}=(0,1,2)$.

设平面 PDC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_{2,},z_2)$，

由 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，得 $\begin{cases}-x_2-y_2+2z_2=0,\\-y_2+2z_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=1$，得 $\vec{n}=(0,2,1)$.

设平面 DGH 与平面 GHE 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{4}{5}$.

20.　（1）因为 X 服从正态分布 $N(63,13^2)$，

所以 $P(X\geq76)=P(X\geq63+13)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$，因此进入面试的人数为 $1000\times0.15865\approx159$.

答：进面试环节得人数约为 159 人.

（2）由题可知，Y 的可能取值为 0，2，4，6，8，10，

则 $P(Y=0)=\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{1}{100}$；$P(Y=2)=\dfrac{3}{4}\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{3}{100}$；

$P(Y=4)=\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times C_2^1\times\dfrac{4}{5}\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{8}{100}=\dfrac{2}{25}$；$P(Y=6)=\dfrac{3}{4}\times C_2^1\times\dfrac{4}{5}\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{24}{100}=\dfrac{6}{25}$；

$P(Y=8)=\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{16}{100}=\dfrac{4}{25}$；$P(Y=10)=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{48}{100}=\dfrac{12}{25}$.

故 Y 的分布列为：

Y	0	2	4	6	8	10
P	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{3}{100}$	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{6}{25}$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{12}{25}$

所以 $E(Y)=0\times\dfrac{1}{100}+2\times\dfrac{3}{100}+4\times\dfrac{2}{25}+6\times\dfrac{6}{25}+8\times\dfrac{4}{25}+10\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{790}{100}=7.9$. 答：数学期望为 7.9 分.

21.　（1）若关于 x 的不等式 $mf(x)\leq e^{-x}+m-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $m\left(e^{x}+e^{-x}-1\right)\le e^{-x}-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\because x>0$，$\therefore e^{x}+e^{-x}-1>0$，即$m\le\frac{e^{-x}-1}{e^{x}+e^{-x}-1}$在（0，+∞）上恒成立，

设 $t=e^{x},(t>1)$，则$m\le\frac{1-t}{t^2-t+1}$在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

$\because \frac{1-t}{t^{2}-t+1}=-\frac{t-1}{(t-1)^{2}+(t-1)+1}=-\frac{1}{(t-1)+\frac{1}{t-1}+1}\ge-\frac{1}{3}$.

当且仅当 $t=2$，即$x=ln2$时上式等号成立. $\therefore m\le-\frac{1}{3}$.

（2）已知 $a>\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$，令 $h(x)=x-(e-1)\ln x-1$，$h'(x)=1-\frac{e-1}{x}$，

由 $h'(x)=1-\frac{e-1}{x}=0$，解得 $x=e-1$.

当 $0<x<e-1$ 时，$h'(x)<0$，此时函数单调递减；当 $x>e-1$ 时，$h'(x)>0$，此时函数单调递增.

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $h(e-1)$. 注意到$h(e)=h(1)=0$，

① $a\in\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right),e\right)\subseteq(1,e)$ 时，$h(a)<0$，即 $a-1<(e-1)\ln a$，从而 $e^{a-1}<a^{e-1}$；

② $a=e$ 时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；

③ $a\in(e,+\infty)\subseteq(e-1,+\infty)$ 时，$h(a)>h(e)=0$，即 $a-1>(e-1)\ln a$，从而 $e^{a-1}>a^{e-1}$.

综上可知：当 $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)<a<e$ 时，$e^{a-1}<a^{e-1}$；当 $a=e$ 时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；当 $a>e$ 时，$e^{a-1}>a^{e-1}$.

22. （1）由题设，$f\left(x\right)=\ln x+\left(x-1\right)e^{x}$ 且 $x>0$，则 $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+xe^{x}>0$，

$\therefore$在 $(0,+\infty)$ 上 $f\left(x\right)$ 单调递增,无减区间.

（2）(ⅰ)由 $f'\left(x\right)=\frac{1-ax^{2}e^{x}}{x}$，令 $g(x)=1-ax^{2}e^{x}$，又 $0<a<\frac{1}{e}$，知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，又 $g(1)=1-ae>0$，

$g(\ln\frac{1}{a})=1-(\ln\frac{1}{a})^{2}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点，即$f'(x)$在 $(0,+\infty)$ 上唯一零点，设零点为 x_0，则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$，

$\therefore 0<x<x_0$，$f'(x)>0$，$f(x)$递增；$x>x_0$，$f'(x)<0$，$f(x)$递减；

$\therefore x_0$是$f(x)$唯一极值点，且为极大值，

令$h(x)=\ln x-x+1$且$x>1$，则$h'(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$，故$h(x)$在$(1,+\infty)$上递减，

$\therefore h(x)<h(x)=0$，即$\ln x<x-1$，$\therefore f\left(ln\frac{1}{a}\right)=ln(ln\frac{1}{a})-ln\frac{1}{a}+1=\square(ln\frac{1}{a})<0$，又$f(x_0)>f(1)=0$，

$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$、$(\boldsymbol{x_0},+\infty)$都有一个唯一零点，故$f(x)$恰有两个零点.

（ii）由题意，$\begin{cases}ax_0^2e^{x_0}=1\\ \ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1}\end{cases}$，消$a$得$\ln x_1=\dfrac{x_1-1}{x_0^2}\cdot e^{x_1-x_0}$，即$e^{x_1-x_0}=\dfrac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$，

当$x>1$时，$\ln x<x-1$，又$x_1>x_0>1$，则$e^{x_1-x_0}<\dfrac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，

$\therefore x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，即$3x_0>x_1+2$，得