

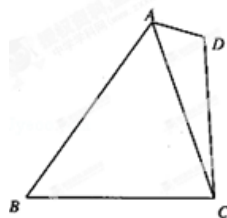
解三角形之多三角形问题

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 评价_____

【例题分析】

例 1. 如图所示, 在四边形 ABCD 中, $\angle D = 2\angle B$, 且 $AD = 1$, $CD = 3$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\triangle ACD$ 的面积; (2) 若 $BC = 2\sqrt{3}$, 求 AB 的长.



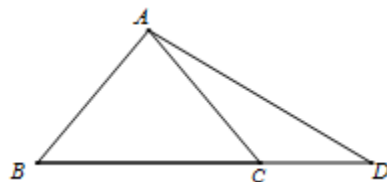
例 2. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$; (2) 若 $AD = 1$, $DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

【举一反三】

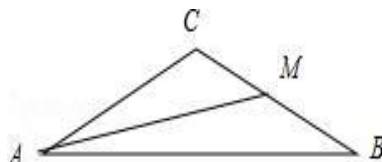
1. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 的延长线上, 且 $BC = 2CD$, $AD = \sqrt{5}$.

(1) 求 $\frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle D}$ 的值; (2) 求 CD 的长.



2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2b - \sqrt{3}c}{\sqrt{3}a} = \frac{\cos C}{\cos A}$.

(1) 求角 A 的值; (2) 若角 $B = \frac{\pi}{6}$, BC 边上的中线 $AM = \sqrt{7}$, 求边 b .



3. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b\cos C + b\sin C = a$.

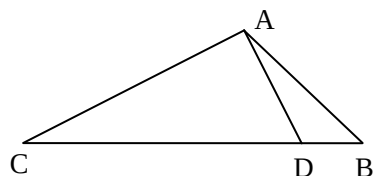
(1) 求角 B 的大小; (2) 若 BC 边上的高等于 $\frac{1}{4}a$, 求 $\cos A$ 的值.

课后作业

1. 如图 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在 BC 边上, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$AB = 3\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{3}$.

(1) 求 AD 的长; (2) 求 $\cos C$.



2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}c\cos A = (2b - \sqrt{3}a)\cos C$.

(1) 求角 C ; (2) 若 $A = \frac{\pi}{6}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, D 为 AB 的中点, 求 $\sin \angle BCD$.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = b\cos C - \frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$.

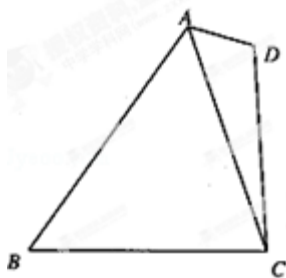
(1) 求 B ; (2) 若点 D 为边 AC 的中点, $BD = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

与解三角形有关的微专题

——多三角形问题

【例题分析】

例 1. 如图所示, 在四边形 ABCD 中, $\angle D = 2\angle B$, 且 $AD=1$, $CD=3$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



(1) 求 $\triangle ACD$ 的面积;

(2) 若 $BC = 2\sqrt{3}$, 求 AB 的长.

【答案】(1) $\sqrt{2}$; (2) $AB=4$

试题解析: 解: (1) 因为 $\angle D = 2\angle B$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\cos D = \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = -\frac{1}{3}$.

因为 $\angle D \in (0, \pi)$, 所以 $\sin D = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $\triangle ACD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD \cdot \sin D = \sqrt{2}$.

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos D = 12$, 所以 $AC = 2\sqrt{3}$.

因为 $BC = 2\sqrt{3}$, $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$, 所以 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{AB}{\sin(\pi - 2B)}$, 得 $AB=4$.

2. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(I) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$;

(II) 若 $AD=1$, $DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

【答案】(I) $\frac{1}{2}$; (II) 1.

【解析】(I) $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAD$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \angle CAD$, 因为 $S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ADC}$, $\angle BAD = \angle CAD$, 所以 $AB = 2AC$. 由正弦定理可得 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

(II) 因为 $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ADC} = BD : DC$, 所以 $BD = \sqrt{2}$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB, \quad AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \angle ADC.$$

$$AB^2 + 2AC^2 = 3AD^2 + BD^2 + 2DC^2 = 6. \text{ 由(I)知 } AB = 2AC, \text{ 所以 } AC = 1.$$

【提分秘籍】

【名师点睛】本题考查了三角形的面积公式、角分线、正弦定理和余弦定理, 由角分线的定义得角的等量关系, 由面积关系得边的关系, 由正弦定理得三角形内角正弦的关系; 分析两个三角形中 $\cos \angle ADB$ 和 $\cos \angle ADC$ 互为相反数的特点结合已知条件, 利用余弦定理列方程, 进而求 AC .

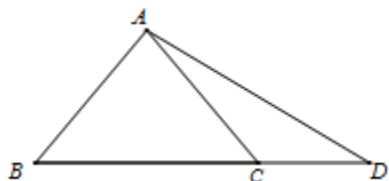
【举一反三】

1. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 的延长线上, 且 $BC = 2CD$,

$$AD = \sqrt{5}.$$

(1) 求 $\frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle D}$ 的值;

(2) 求 CD 的长.



解: (1) 因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 所以 $AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$,

又 $BC = 2CD$, 所以 $AC = \sqrt{2}CD$,3 分

在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle D}, \text{ 即 } \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle D} = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{6 分}$$

(2) 设 $CD = x$, 则 $AC = \sqrt{2}x$, 在 $\triangle ADC$ 中:

$$AD^2 = CD^2 + AC^2 - 2AC \cdot CD \cos \angle ACD, \text{ 即 } 5 = x^2 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\Rightarrow x = 1, \text{ 即 } CD = 1 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

2、(江西师范大学附属中学 2017 届高三 12 月月考) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

且 $\frac{2b - \sqrt{3}c}{\sqrt{3}a} = \frac{\cos C}{\cos A}.$

(I) 求角 A 的值;

(II) 若角 $B = \frac{\pi}{6}$, BC 边上的中线 $AM = \sqrt{7}$, 求边 b .

解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore \frac{2b - \sqrt{3}c}{\sqrt{3}a} = \frac{\cos C}{\cos A},$

$$\therefore (2b - \sqrt{3}c) \cos A = \sqrt{3}a \cos C,$$

$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin C \cos A = \sqrt{3} \sin(A + C) = \sqrt{3} \sin B,$$

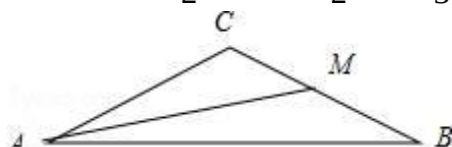
$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore A = \frac{\pi}{6}.$$

$$(II) \because A = B = \frac{\pi}{6}, \quad \therefore a = b, C = \pi - B - A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\because BC \text{ 边上的中线 } AM = \sqrt{7},$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ACM \text{ 中, 由余弦定理可得: } AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2AC \cdot CM \cdot \cos C,$$

$$\text{即: } 7 = b^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2b \times \frac{b}{2} \times \cos \frac{2\pi}{3}, \quad \therefore \text{整理解得 } b = 2.$$



3. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \cos C + b \sin C = a$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 若 BC 边上的高等于 $\frac{1}{4}a$, 求 $\cos A$ 的值.

(I) 解: 因为 $b \cos C + b \sin C = a$,

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 得,}$$

$$\sin B \cos C + \sin B \sin C = \sin A. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } A + B + C = \pi,$$

所以 $\sin B \cos C + \sin B \sin C = \sin(B+C)$2 分

即 $\sin B \cos C + \sin B \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C$3 分

因为 $\sin C \neq 0$,

所以 $\sin B = \cos B$4 分

因为 $\cos B \neq 0$, 所以 $\tan B = 1$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$5 分

(II) 解法 1: 设 BC 边上的高线为 AD , 则 $AD = \frac{1}{4}a$6 分

因为 $B = \frac{\pi}{4}$, 则 $BD = AD = \frac{1}{4}a$, $CD = \frac{3}{4}a$8 分

所以 $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$, $AB = \frac{\sqrt{2}}{4}a$10 分

由余弦定理得 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\cos A$ 的值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$12 分

解法 2: 设 BC 边上的高线为 AD , 则 $AD = \frac{1}{4}a$6 分

因为 $B = \frac{\pi}{4}$, 则 $BD = AD = \frac{1}{4}a$, $CD = \frac{3}{4}a$8 分

所以 $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$, $AB = \frac{\sqrt{2}}{4}a$10 分

由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$,

得 $\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{a \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{4}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$11 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $AB < AC$, 得 $C < B = \frac{\pi}{4}$, 所以 A 为钝角.

所以 $\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\cos A$ 的值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$12 分

解法 3: 设 BC 边上的高线为 AD , 则 $AD = \frac{1}{4}a$6 分

因为 $B = \frac{\pi}{4}$, 则 $BD = AD = \frac{1}{4}a$, $CD = \frac{3}{4}a$8 分

设 $\angle DAC = \theta$, 则 $\tan \theta = \frac{CD}{AD} = 3$9 分

所以 $\tan A = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -2$, 所以 A 为钝角.10 分

所以 $\cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{5}$,11 分

因为 A 为钝角. 所以 $\cos A = -\frac{\sqrt{5}}{5}$12 分

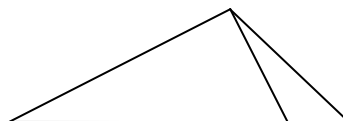
课后作业

1. 【鞍山市 2013—2014 学年度第二学期期末考试】如图 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在 BC 边上, 且

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \quad \sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad AB = 3\sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{3}.$$

(I) 求 AD 的长;

(II) 求 $\cos C$.



【答案】(I) $AD = 3$; (II) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【解析】

试题分析: (I) 通过向量的数量积, 判断垂直关系, 求出 $\cos \angle BAD$ 的值, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理求 AD 的长; (II) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理求出 $\sin \angle ADB$, 通过三角形是直角三角形, 即可求出 $\cos C$.

试题解析: (I) 由 $AD \perp AC$ 知, $\sin \angle BAC = \sin(\angle DAB + \frac{\pi}{2}) = \cos \angle DAB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理知 $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$

即 $AD^2 - 8AD + 15 = 0$, 解得 $AD = 3$ 或 $AD = 5$

显然 $AB > AD$, 故 $AD = 3$.

(II) 由 $\cos \angle DAB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 得 $\sin \angle BAD = \frac{1}{3}$

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理知 $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$,故 $\sin \angle ADB = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\cos C = \cos(\angle ADB - \frac{\pi}{2}) = \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

2. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $\sqrt{3}c \cos A = (2b - \sqrt{3}a) \cos C$.

(1)求角 C ;

(2)若 $A = \frac{\pi}{6}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, D 为 AB 的中点,求 $\sin \angle BCD$.

17. 解:(1)由 $\sqrt{3}c \cos A = (2b - \sqrt{3}a) \cos C$,得 $2b \cos C = \sqrt{3}(c \cos A + a \cos C)$,由正弦定理可得, $2 \sin B \cos C = \sqrt{3}(\sin C \cos A + \sin A \cos C) = \sqrt{3} \sin(A+C) = \sqrt{3} \sin B$,因为 $\sin B \neq 0$,所以 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,因为 $0 < C < \pi$,

所以 $C = \frac{\pi}{6}$ 5 分

(2)因为 $A = \frac{\pi}{6}$,故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,且顶角 $B = \frac{2\pi}{3}$, 6 分

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin B = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \sqrt{3}$, 7 分

所以 $a = 2$,在 $\triangle DBC$ 中,由余弦定理可得, $CD^2 = DB^2 + BC^2 - 2DB \cdot BC \cos B = 7$,所以 $CD = \sqrt{7}$,在 $\triangle DBC$

中,由正弦定理可得, $\frac{CD}{\sin B} = \frac{DB}{\sin \angle BCD}$,即 $\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sin \angle BCD}$,所以 $\sin \angle BCD = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 10 分

3. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $a = b \cos C - \frac{\sqrt{3}}{3}c \sin B$.

(1)求 B ;

(2)若点 D 为边 AC 的中点, $BD = 1$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

解:(1)因为 $a = b \cos C - \frac{\sqrt{3}}{3}c \sin B$,由正弦定理知 $\sin A = \sin B \cos C - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B$.

$$\text{即 } \sin(B+C) = \sin B \cos C - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B,$$

$$\sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin B \cos C - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B,$$

$$\cos B \sin C = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B. \text{ 又由 } C \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的内角, 故而 } \sin C \neq 0,$$

所以 $\tan B = -\sqrt{3}$ ，又由 B 为 $\triangle ABC$ 的内角，故而 $B = \frac{2\pi}{3}$ 。

(2) 因为点 D 为 AC 边的中点，故而 $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ，

两边平方得 $4|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC + |\overrightarrow{BC}|^2$ ，

又由 (1) 知 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ，设 $|\overrightarrow{BA}| = c$ ， $|\overrightarrow{BC}| = a$ ，即 $4 = a^2 + c^2 - ac$ ，

所以 $4 + ac = a^2 + c^2 \geq 2ac$ ，即 $ac \leq 4$ ，当且仅当 $a = c = 2$ 时取等号。

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}ac$ ，

故而当且仅当 $a = c = 2$ 时， $S_{\triangle ABC}$ 取到最大值 $\sqrt{3}$ 。