

创新教学方式 发展数学素养

——以培养高中生数学抽象思维为例

李建良

浙江省嘉善高级中学 314100

[摘要] “数学抽象”是高中数学核心素养的重要内容,高中数学教学要着力培养学生的数学抽象能力,通过优化教学和学习方式,引导学生积累从具体到抽象的活动经验,通过抽象概括,把握数学本质,使学生深入理解数学相关概念或定理.文章以教学实践为例,初步探索如何通过优化教学方式发展高中生数学抽象核心素养.

[关键词] 数学抽象;核心素养;教学方式

《2017版普通高中数学课程标准》明确指出:“数学核心素养是数学课程目标的集中体现,数学核心素养是在数学学习过程中逐步形成的,高中阶段数学核心素养包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析.”抽象是数学的思维方式之一,是数学活动中最基本的思维方法.对于数学抽象的教学,实际上是一种构造活动,是借助已有知识和逻辑推理建构新概念或定理的过程.因此,我们要优化教学方式,引导学生在已有知识基础上通过观察实验、猜想验证、逻辑推理、抽象概括等数学活动逐步获得新概念、新定理,要达到这样的目的必须培养学生的数学抽象核心素养.下面结合具体实例来谈谈在教学中如何通过直观教学、数学实验、类比联想、数学探究等区别于传统的教学方式发展学生抽象素养.

重视直观教学,增强感性体验

直观教学就是在数学教学中,为学生提供生动、具体、形象的可感知的实物、图片、模型或作图软件绘制的动态图形,丰富学生的直接经验和感性认识,深化学生理性认识的一种教学手段.目的是帮助学生正确认识学习的对象,牢固掌握所学知识,有利于激发学生的学习兴趣,提高学生的数学抽象能力.

在必修1“函数单调性”的教学过程中,尽可能提供实例和素材,创设问题情境,引导学生直观地描述函数图像的特征,形与数的关系,进而帮助生理解和掌握函数单调性概念.教学中首先创设情境,设计如下问题.

问题1:函数 $f(x)=x$ 与 $f(x)=x^2$ 的图像是怎样变化的,它们有怎样的升降规律?

多媒体给出上述两个函数图像,让学生充分观察图像的变化,并组织学生对它们进行多视角的比较,进而分析每

个图像各自的特点,从中寻找它们的相同点和不同点.这样做不仅体现数学建构主义学习的主要特征,而且可以培养观察、联想、比较、分析、综合、抽象、概括的一般思维方法.

学生相互争鸣提出自己的意见,分化出这些图形相对共同的某种性质或特征.讨论之后,学生的回答如下:一次函数 $f(x)=x$ 图像由左至右是上升的;函数 $f(x)=x^2$ 图像在 y 轴左侧是下降的,在 y 轴右侧是上升的.这时教师要做必要的说明:不同的函数,其图像的变化趋势可能也不同;同一函数在不同区间上的变化趋势也不一定相同,即上述图像的上升或下降表明了函数在变化中一种不变的性质,数学上把这种函数的性质称之为“单调性”,上升称为单调递增,下降称为单调递减.此时可以设置如下问题.

问题2:怎样用 x 与 $f(x)$ 数值的变化来描述图像的上升或下降呢?

教师可指导学生利用科学计算器

作者简介:李建良(1977-),本科学历,中学高级教师,嘉兴市第六批名教师.

表1

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$f(x)=x^2$...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

完成 $f(x)=x^2$ 的对值表,并观察表格中自变量的值由小到大变化时,函数值 $f(x)$ 的变化(表1).

学生归纳得到:二次函数 $f(x)=x^2, x < 0$ 时函数值 $f(x)$ 随着 x 的增大而减小, $x > 0$ 时函数值 $f(x)$ 随着 x 的增大而增大,即函数 $y=f(x)$ 图像相对 x 轴逐渐上升等价于函数 $f(x)$ 随 x 的增大而增大;函数 $y=f(x)$ 图像相对 x 轴逐渐下降等价于函数 $f(x)$ 随 x 的增大而减小.接着教师要引导学生如何利用函数解析式 $f(x)=x^2$ 描述“函数 $f(x)$ 随 x 的增大而增大”和“函数 $f(x)$ 随 x 的增大而减小”.这是用动态的图形描述过渡到用静态的符号描述的过程,需要让学生充分讨论,寻找数学抽象表述的方法,提出单调性定义的假设.此时教师提出如下问题.

问题3:对于 $f(x)=x^2$,在 $(0, +\infty)$ 上,任意改变 x_1, x_2 的值,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $x_1^2 < x_2^2$ 吗?

学生尝试解决任意给出一些 x_1, x_2 的值,发现当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $x_1^2 < x_2^2$.在教师引导下学生通过思考、讨论,交流得出:(图形语言)函数 $f(x)=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图像上升;(文字语言)函数 $f(x)$ 随 x 的增大而增大;(符号语言)在 $(0, +\infty)$ 上,对任意 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $x_1^2 < x_2^2$,具有这种性质的函数叫增函数.然后教师提出问题:对于一般的函数 $y=f(x)$,其定义域 I ,我们应当如何定义这个函数在某个区间 D 上是增函数呢?由具体到一般引出增函数定义,由形象到抽象,培养学生的逻辑思维能力.最后让学生根据函数 $f(x)=x^2$ 在 y 轴左侧图像是下降的,类比增函数的定义,给出减函数的定义,培养学生的类比归纳能力.另外学生在表述时常常不到位,其中有的是语言组织不当,有的是理解存在缺陷.这时学生之间的讨论、补充、修正很重要,需要耐心地通过学生自身的合作交流达成相对准确的表述.

开展实验教学,验证数学抽象认识

数学实验教学是在教师的引导下,

学生运用有关工具,通过实际操作,发现数学概念、定理,验证数学结论的活动.

例如,必修2“线面垂直的判定定理”一节,我们可以设计如下实验教学:如图1,请同学们准备一块三角形的纸片,我们一起来做一个实验:过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 翻折纸片,得到折痕 AD ,将翻折后的纸片竖起放置在桌面 α 上(BD, CD 与桌面接触). (1)折痕 AD 与桌面 α 垂直吗? (2)如何翻折才能使折痕 AD 与桌面所在平面 α 垂直?

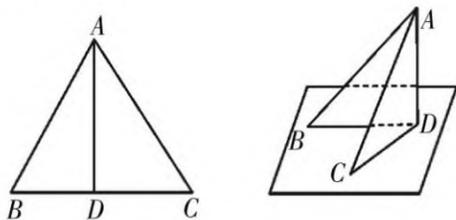


图1

在折纸实验中,学生会出现“垂直”与“不垂直”两种情况,引导学生进行交流,根据直线与平面垂直的定义分析“不垂直”的原因,学生再次折纸,进而探究直线与平面垂直的条件.在学生继续动手操作的过程中发现:当且仅当折痕 AD 是边 BC 上的高时, AD 与桌面 α 垂直,这激发了学生的好奇心:这是为什么呢?紧接着可以设置这样一个问题:(1)有人说,折痕 AD 所在直线与桌面 α 上的一条直线垂直,就可以判断 AD 垂直平面 α ,你同意他的说法吗?(2)如图1,由折痕 $AD \perp BC$,翻折之后垂直关系不变,即 $AD \perp BD$ 且 $AD \perp CD$,由此你能得到什么结论?通过探究,学生发现: $AD \perp BC$ 沿着 AD 翻折之后这一垂直关系是一个不

变关系,即在图2中 $AD \perp BD$ 且 $AD \perp CD$,并且 BD 交 CD 于 $D, BD, CD \subset \alpha$.通过以上实验观察、交流探究,线面垂直的判定定理自然就出来了.

实施数学探究,培养学生抽象思维

探究性学习,是指在教师的指导下,让学生主动去探索知识、获取知识并运用知识的学习方式.因此对于教材安排的有些“探究”“思考”,不但要充分利用起来,而且要加以拓展和延伸,将探究进行到底.

教学选修2-3“二项式系数的性质”时,为了使建立“杨辉三角”与二项式系数的性质之间关系的直觉,让学生计算 $(a+b)^n$ 展开式的二项式系数并填入表格.学生计算后,发现每一行的系数具有对称性,为方便探究,教材建议将表格表示形式发生转变,引出“杨辉三角”,并设置探究2:你能借助上面的表示形式发现一些新的规律吗?教材将二项式系数性质与“杨辉三角”结合起来,是因为当二项式系数不大时,可借助它直接写出各项的二项式系数,并利用它探究二项式系数的性质,如对称性、增减性与最大值、二项式系数的和等等.

在研究完二项式系数的性质后,可以收集相关资料,创设合理情景,分组探索研究:

1. 每位同学都自己编制杨辉三角前20行.
2. 每个小组发一份“杨辉三角研究成果报告单”,附:杨辉三角研究成果报告单(表2).

表2

第 _____ 组		杨辉三角研究成果报告单		×年×月×日	
研究的问题	猜想结论	证明或说明	疑问		
1.	1.	1.			
2.	2.	2.			
3.	3.	3.			
4.	4.	4.			
5.	5.	5.			

(下转第 23 页)

训练,进行及时反馈和自我评价,让学生在运用新知识解决实际问题的同时能加以融会贯通,从中收获成功的喜悦,享受学习的乐趣.

【例题解析】

例1: (1)已知抛物线的标准方程是 $y=x^2$,求它的焦点坐标和准线方程;

(2)已知抛物线的焦点坐标是 $F(-2, 0)$,求它的标准方程和准线方程.

例2:已知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上,焦点到准线的距离是 $\sqrt{2}$,求抛物线的标准方程、焦点坐标和准线方程.

学生总结思路:第1步:将抛物线方程化为标准形式;第2步:求出 $\frac{p}{2}$ 的值;第3步:确定焦点位置,画出草图;第4步:求出焦点坐标和准线方程.

设计意图:题目的设计由易到难,层层深入.通过对解题方法的总结,使学生形成解题技能,提高解题能力.

【巩固练习】

1. 求下列抛物线的焦点坐标和准

线方程:

(1) $y=-4x^2$; (2) $y^2=4x$.

思路:先将抛物线方程化成标准形式,数形结合求出焦点坐标和准线方程.

2. 根据下列条件求抛物线的标准方程:

(1)焦点 $F(-1, 0)$; (2)准线: $y=2$.

思路:先定型,再定量.由焦点位置或准线方程确定抛物线的形式,然后求出 p 的值.

设计意图:当堂检测,反馈效果,总结方法,提升解题能力,感受成功的喜悦.

【拓展提升】

3. 求顶点在原点,经过点 $P(4, 2)$,且焦点在坐标轴上的抛物线的标准方程.

设计意图:满足层次较高学生的学习要求,渗透数形结合的思想 and 分类讨论的思想.

① 数学生态概念课教学的反思

数学概念的形成是在一定背景下

探索,自然生长和再创造的过程,最终以定义的形式揭露其本质特征.正确理解数学概念并能加以运用,首先必须明确这个数学概念的内涵——所有对象的共同本质属性,及其外延——所有对象的范围.核心素养导向下的高考,不再是对单一知识点的强化记忆和简单运用,而更多关注知识的基础性、综合性、应用性和创新性,关注知识的交汇和迁移,光靠机械模仿训练,生搬硬套公式,高考注定失败.可如今一些数学课堂,教师满堂灌,忽视概念教学,靠刷题的现象屡见不鲜.由于学生没有对概念的本质和外延有足够的理解、把握,知其然不知其所以然,遇到新情景题、变式题,就束手无策.因此在高中概念课教学中,数学教师应遵循学生数学学习的认知发展规律,注重知识的预设和生成,深入挖掘知识的内涵与联系,还原数学概念自然生长的过程,让学生在知识的获取过程中感到一切都来得那么自然和原生态.

(上接第 20 页)

3. 教师用多媒体或实物投影仪出示下列五个问题.

问题1:在杨辉三角的第1、3、7、15、……行,即第 2^k-1 行的各数字有什么特点?

问题2:在杨辉三角的第5行中,除去两端数字1以外,行数5能整除其余的所有各数,你能找出具有类似性质的三行吗?这时行数 P 是一个什么样的数?

问题3:在杨辉三角的前5行中作平行于左斜边的直线,这些直线所经过的数字之和有什么特点?

问题4:在教材第36页图2中,请先求出斜线所经过的数字的和,再观察这些和,你能发现什么规律吗?

问题5:在杨辉三角的前6行、……、

前 n 行数字中作平行于右斜边的直线,这些直线所经过的数字的和是多少?

各组研究后,成果由小组长汇总,填入研究成果报告单,教师审阅后,按相异的原则抽选3个组,或抽签选取3个组,然后指导学生使用投影仪展示,并加以说明.被抽小组发言后,由未被抽选的小组发言说明不同的结论或疑问,再由另外的同学进行评估交流.教师对不同的结论和疑问可组织学生讨论、答辩,并循循善诱地引导到正确结论上来,结论由学生给出.如果时间允许,对高阶等差数列求和问题,教师可介绍“逐差法”求和,与用杨辉三角数字规律求高阶等差数列和比较繁简,另外还可引导学生共同探求“莱布尼茨三角”的数字规律.在课堂上有的规律可能探求不

出,宁可留到课外去讨论,教师也不要把结论强行“塞”给学生,在整个过程中要充分尊重学生的“主角”地位.

数学探究活动是综合提升数学科核心素养的载体.在课堂教学中,应重视学生自主探索研究的学习过程,教师重在点拨、指导,以利形成研究的氛围.为培养学生的“发现”欲望,激发学生兴趣,对学生探求的结果,哪怕是微小的发现,都应给予充分肯定、表扬和鼓励.教学相长,以此建设新型的师生关系.培养学生的探究能力不是一朝一夕的,只要我们充分利用好教材提供的丰富资源,正确把握数学教育的特点,充分关注学习过程,诱发探究兴趣,尝试探究途径,拓宽探究领域,学生的探究能力就一定能够得到明显提高.