

第2节 导数在研究函数中的应用

知识分类落实

回扣知识·夯实基础

知识梳理

1. 函数的单调性与导数的关系

(1) 对于函数 $y=f(x)$, 如果在某区间上 $f'(x)>0$, 那么 $f(x)$ 为该区间上的增函数;

(2) 如果在某区间上 $f'(x)<0$, 那么 $f(x)$ 为该区间上的减函数;

(3) 若 $f'(x)=0$, 则 $f(x)$ 在这个区间内是常数函数.

2. 函数的极值与导数

(1) 一般地, 求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法

① 极大值与导数的关系

x	x_1 左侧	x_1	x_1 右侧
$f'(x)$	$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$
$f(x)$	增	极大值 $f(x_1)$	减

② 极小值与导数的关系

x	x_2 左侧	x_2	x_2 右侧
$f'(x)$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$	$f'(x)>0$
$f(x)$	减	极小值 $f(x_2)$	增

(2) 求可导函数极值的步骤

① 求 $f'(x)$;

② 求方程 $f'(x)=0$ 的根;

③ 考查 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根附近的左右两侧导数值的符号. 如果左正右负, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值; 如果左负右正, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值.

3. 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最值的步骤:

(1) 第一步: 求 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的极值;

(2) 第二步: 将第一步中求得的极值与 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 得到 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值.



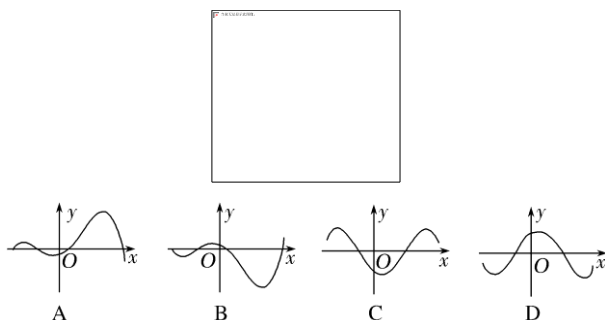
A.1 B.2 C.3 D.4

答案 A

解析 由题意知在 $x=-1$ 处 $f(-1)=0$, 且其两侧导数符号为左负右正.



4.(2017 浙江卷)函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是()



答案 D

解析 设导函数 $y=f'(x)$ 与 x 轴交点的横坐标从左往右依次为 x_1, x_2, x_3 , 由导函数 $y=f'(x)$ 的图象易得当 $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$ (其中 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$), 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1), (x_2, x_3)$ 上单调递减, 在 $(x_1, x_2), (x_3, +\infty)$ 上单调递增, 观察各选项, 只有 D 选项符合.

5.(多选题)(2021 新高考 8 省联考)已知函数 $f(x)=x\ln(1+x)$, 则()

A. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 有两个零点

C. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线的斜率为 $-1-\ln 2$

D. $f(x)$ 是偶函数

答案 AC

解析 $f(x)=x\ln(x+1)$, 所以当 $x>0$ 时, $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 A 正确.

令 $x\ln(x+1)=0$, 所以 $x=0$ 或 $\ln(x+1)=0$, 所以 $x=0$, 故 $f(x)$ 只有 1 个零点 0,

所以 B 不正确;

$f(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, 所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-1=-1-\ln 2$, 所以 C 正确;

定义域不关于原点对称, 所以 $f(x)$ 不是偶函数, 所以 D 不正确. 故选 AC.

6.(2021 青岛检测) 已知函数 $f(x)=\sin 2x+4\cos x-ax$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案 $[3, +\infty)$

解析 $f'(x)=2\cos 2x-4\sin x-a$

$$=2(1-2\sin^2x)-4\sin x-a$$

$$=-4\sin^2x-4\sin x+2-a=-(2\sin x+1)^2+3-a.$$

由题设, $f'(x)\leq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.

因此 $a\geq 3-(2\sin x+1)^2$ 恒成立, 则 $a\geq 3$.

第一课时 利用导数研究函数的单调性

考点分层突破

考点聚焦 · 题型剖析

考点一 不含参函数的单调性 自主演练

1. 函数 $f(x)=x^2-2\ln x$ 的递减区间是()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1)$ D. $(-1, 1)$

答案 A

解析 $\because f(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}(x>0)$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 为减函数;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 为增函数.

2. 函数 $f(x)=(x-3)e^x$ 的递增区间是()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, 3)$
C. $(1, 4)$ D. $(2, +\infty)$

答案 D

解析 $f'(x)=(x-3)'e^x+(x-3)(e^x)'=(x-2)e^x$,

令 $f'(x)>0$, 解得 $x>2$, 故选 D.

3. 已知定义在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$, 则 $f(x)$ 的递增区间是 _____.

答案 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

解析 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$.

令 $f'(x)=x\cos x>0$,

则其在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的解集为 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

感悟升华 确定函数单调区间的步骤:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f'(x)$;

(3)解不等式 $f'(x)>0$, 解集在定义域内的部分为单调递增区间;

(4)解不等式 $f'(x)<0$, 解集在定义域内的部分为单调递减区间.

考点二 讨论含参函数的单调性 师生共研

【例1】已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x$, $a>0$, 试讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= ax - (a+1) + \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x} \\&= \frac{(ax-1)(x-1)}{x}.\end{aligned}$$

①当 $0<a<1$ 时, $\frac{1}{a}>1$,

$\therefore x \in (0, 1)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$;

$x \in (1, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x)<0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上单调递减;

②当 $a=1$ 时, $\frac{1}{a}=1$,

$\therefore f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

③当 $a>1$ 时, $0<\frac{1}{a}<1$,

$\therefore x \in (0, \frac{1}{a})$ 和 $(1, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$;

$x \in (\frac{1}{a}, 1)$ 时, $f'(x)<0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减.

综上, 当 $0<a<1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上单调递减;

当 $a=1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a>1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减.

感悟升华 1.(1)研究含参数的函数的单调性,要依据参数对不等式解集的影响进行分类讨论.

(2)划分函数的单调区间时,要在函数定义域内讨论,还要确定导数为0的点和函数的间断点.

2.个别导数为0的点不影响所在区间的单调性,如 $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2 \geq 0$ ($f'(x)=0$ 在 $x=0$ 时取到), $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

【训练1】 已知函数 $f(x)=ax+\ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), 求 $f(x)$ 的单调区间.

解 由已知得 $f'(x)=a+\frac{1}{x}=\frac{ax+1}{x}$ ($x>0$),

①当 $a \geq 0$ 时, 由于 $x>0$, 故 $ax+1>0$, $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间 $(0, +\infty)$.

②当 $a<0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=-\frac{1}{a}$.

在区间 $(0, -\frac{1}{a})$ 上, $f'(x)>0$, 在区间 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上, $f'(x)<0$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, -\frac{1}{a})$, 单调递减区间为 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$.

考点三 根据函数单调性求参数 典例迁移

【例2】 (经典母题) 已知 $x=1$ 是 $f(x)=2x+\frac{b}{x}+\ln x$ 的一个极值点.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2)设函数 $g(x)=f(x)-\frac{3+a}{x}$, 若函数 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 内单调递增, 求实数 a 的取值范围.

解 (1) $f(x)=2x+\frac{b}{x}+\ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\therefore f'(x)=2-\frac{b}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+x-b}{x^2}.$$

因为 $x=1$ 是 $f(x)=2x+\frac{b}{x}+\ln x$ 的一个极值点,

所以 $f'(1)=0$, 即 $2-b+1=0$.

解得 $b=3$, 经检验, 适合题意, 所以 $b=3$.

$$\text{所以 } f(x)=2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+x-3}{x^2},$$

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$.

$$(2) g(x) = f(x) - \frac{3+a}{x} = 2x + \ln x - \frac{a}{x} (x > 0),$$

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} (x > 0).$$

因为函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $g'(x) \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

即 $2 + \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

所以 $a \geq -2x^2 - x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

所以 $a \geq (-2x^2 - x)_{\max}, x \in [1, 2]$.

因为在 $[1, 2]$ 上, $(-2x^2 - x)_{\max} = -3$, 所以 $a \geq -3$.

所以实数 a 的取值范围是 $[-3, +\infty)$.

【迁移 1】 本例(2)中, 若函数 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围.

解 依题意 $g'(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$ 在 $[1, 2]$ 上满足 $g'(x) \leq 0$ 恒成立,

$\therefore$ 当 $x \in [1, 2]$ 时, $a \leq -2x^2 - x$ 恒成立,

又 $t = -2x^2 - x = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$, $x \in [1, 2]$ 是减函数,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, $t = -2x^2 - x$ 取得最小值 -10 .

所以 $a \leq -10$, 即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -10]$.

【迁移 2】 在本例(2)中, 若函数 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上不单调, 求实数 a 的取值范围.

解 $\because$ 函数 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上不单调,

$\therefore g'(x) = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内有解,

则 $a = -2x^2 - x = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$ 在 $(1, 2)$ 内有解,

易知该函数在 $(1, 2)$ 上是减函数,

$\therefore a = -2x^2 - x$ 的值域为 $(-10, -3)$,

因此实数 a 的取值范围为 $(-10, -3)$.

感悟升华 1.(1)已知函数的单调性,求参数的取值范围,应用条件 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), $x \in (a, b)$ 恒成立,解出参数的取值范围(一般可用不等式恒成立的理论求解),应注意参数的取值是 $f(x)$ 不恒等于 0 的参数的范围.(2)如果能分离参数,则尽可能分离参数后转化为参数值与函数最值之间的关系.

2.若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上不单调,则转化为 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 上有解.

考点四 与导数有关的函数单调性的应用 **多维探究**

角度 1 比较大小

【例 3】(多选题)(2021 泰州抽测)定义在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $f(x)$, 已知 $f'(x)$ 是它的导函数, 且恒有 $\cos x f'(x) + \sin x f(x) < 0$ 成立, 则有()

- A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ B. $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right) > f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
C. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ D. $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

答案 CD

解析 构造函数 $g(x) = \frac{f'(x)}{\cos x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. 则 $g'(x) = \frac{f''(x) \cos x + f'(x) \sin x}{(\cos x)^2} < 0$,

即函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 所以 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 同理, $g\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 即 $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 故选 CD.

角度 2 解不等式

【例 4】已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数, 且 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $f(x) > \frac{f'(x)}{\ln 2}$ 成立, 若 $f(-2) = 2$, 则不等式 $f(x) > -2^{x-1}$ 的解集为()

- A. $(-2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\infty, 2)$

答案 D

解析 $f(x) > \frac{f'(x)}{\ln 2} \Leftrightarrow f'(x) - \ln 2 f(x) < 0$.

令 $g(x) = \frac{f(x)}{2^x}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x) \ln 2}{2^x}$,

$\therefore g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

由 $f(-2) = 2$, 且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数,

得 $f(2) = -2$, 则 $g(2) = \frac{f(2)}{2^2} = -\frac{1}{2}$,

又 $f(x) > -2^{x-1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2^x} > -\frac{1}{2} = g(2)$,

所以 $x < 2$.

感悟升华 1. 利用导数比较大小, 其关键在于利用题目条件构造辅助函数, 把比较大小的问题转化为先利用导数研究函数的单调性, 进而根据单调性比较大小.

2. 与抽象函数有关的不等式, 要充分挖掘条件关系, 恰当构造函数; 题目中若存在 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的不等关系时, 常构造含 $f(x)$ 与另一函数的积(或商)的函数, 与题设形成解题链条, 利用导数研究新函数的单调性, 从而求解不等式.

【训练 2】(2021 新高考 8 省联考) 已知 $a < 5$ 且 $ae^5 = 5e^a$, $b < 4$ 且 $be^4 = 4e^b$, $c < 3$ 且 $ce^3 = 3e^c$, 则()

A. $c < b < a$

B. $b < c < a$

C. $a < c < b$

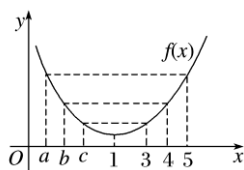
D. $a < b < c$

(2)(2021 武汉模拟) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意实数 x , 都有 $f(x) > f'(x)$, 且 $f(x) + 2021$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) + 2021e^x < 0$ 的解集为()

A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

答案 (1) D (2) B

解析 (1) 法一 由已知 $\frac{e^5}{5} = \frac{e^a}{a}$, $\frac{e^4}{4} = \frac{e^b}{b}$, $\frac{e^3}{3} = \frac{e^c}{c}$,



设 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

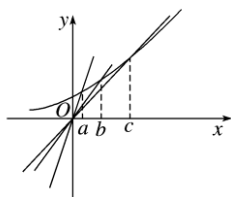
所以 $f(3) < f(4) < f(5)$, $f(c) < f(b) < f(a)$,

所以 $a < b < c$.

法二 设 $e^x = \frac{e^5}{5}x$, ①

$e^x = \frac{e^4}{4}x$, ②

$$e^x = \frac{e^3}{3}x, \quad ③$$



a, b, c 依次为方程①②③的根, 结合图象, 方程的根可以看作两个图象的交点的横坐标,

$$\because \frac{e^5}{5} > \frac{e^4}{4} > \frac{e^3}{3}, \text{ 由图可知 } a < b < c.$$

$$(2) \text{ 由题意, 构造新函数 } g(x) = \frac{f(x)}{e^x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x},$$

因为 $f(x) > f'(x)$, 所以 $g'(x) < 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

因为 $f(x) + 2021$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) + 2021 = 0$,

所以 $f(0) = -2021$, 则 $g(0) = -2021$,

所以不等式 $f(x) + 2021e^x < 0$ 等价于 $g(x) < g(0)$, 所以 $x > 0$,

所以不等式 $f(x) + 2021e^x < 0$ 的解集为 $(0, +\infty)$.

拓展视野 / 以“函数凹凸性”为背景的导数问题

一般地, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq$

$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 则 $f(x)$ 为凸函数, 其图象向上凸出; 若 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$, 都有

$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 则 $f(x)$ 为凹函数, 其图象向下凸出.

【典例】(2020 青岛检测) 丹麦数学家琴生是 19 世纪对数学分析做出卓越贡献的巨人, 特别是在函数的凹凸性与不等式方面留下了很多宝贵的成果. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上的导函数为 $f'(x)$, $f'(x)$ 在 (a, b) 上的导函数为 $f''(x)$, 若在 (a, b) 上 $f''(x) < 0$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上为“严格凸函数”. 已知 $f(x) = e^x - x \ln x - \frac{m}{2}x^2$ 在

$(1, 4)$ 上为“严格凸函数”, 则实数 m 的取值范围是()

A. $(-\infty, 2e-1]$

B. $[e-1, +\infty)$

C. $\left[e^4 - \frac{1}{4}, +\infty\right)$

D. $(e, +\infty)$

答案 C

解析 因为 $f(x) = e^x - x \ln x - \frac{m}{2}x^2$,

所以 $f'(x) = e^x - \ln x - 1 - mx$,

所以 $f''(x) = e^x - \frac{1}{x} - m$.

因为 $f(x) = e^x - x \ln x - \frac{m}{2}x^2$ 在 $(1, 4)$ 上为“严格凸函数”,

所以 $f''(x) = e^x - \frac{1}{x} - m < 0$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立,

即 $m > e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立.

令 $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x \in (1, 4)$, 所以 $g'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1, 4)$ 上单调递增, 所以 $g(x) < e^4 - \frac{1}{4}$,

所以 $m \geq e^4 - \frac{1}{4}$,

即实数 m 的取值范围是 $\left[e^4 - \frac{1}{4}, +\infty \right)$.

思维升华 1. $f(x) = e^x - x \ln x - \frac{m}{2}x^2$ 在 $(1, 4)$ 上为“严格凸函数”, 等价于 $f''(x) < 0$

在 $(1, 4)$ 上恒成立, 利用分离参数法即可得 m 的取值范围.

2. 本题是以函数的凹凸性为背景考查函数的二阶导数的符号的问题, 考查了直观想象、逻辑推理和数学运算核心素养. 破解本题的关键是明确严格凸函数的定义, 求出所给函数的二阶导数, 判断其是否在给定的区间上恒为负值.

【训练】(多选题)(2021 山东名校联考) 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(x) > 0$,

且 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2), f(x_1) + f(x_2) < 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 则下列选项中一定正确的是()

A. $f(2) < f(e) < f(\pi)$

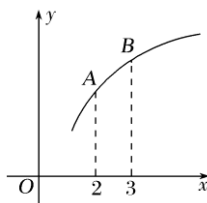
B. $f(\pi) < f'(e) < f'(2)$

C. $f(2) < f'(2) - f'(3) < f(3)$

D. $f(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$

答案 ABD

解析 因为 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.



$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$, 恒有 $f(x_1) + f(x_2) < 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$,

$$\text{即 } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

所以 $y=f(x)$ 的图象是向上凸起的, 大致图象如图所示.

由图可知 $f(2) < f(e) < f(\pi)$, 故 A 项正确.

因为 $f'(x)$ 反映了函数 $f(x)$ 图象上各点处的切线的斜率,

由图可知, 随着 x 的增大, $f(x)$ 的图象越来越平缓, 即切线的斜率越来越小,

所以 $f'(\pi) < f'(e) < f'(2)$, 故 B 项正确.

因为 $f(3) - f(2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$ 表示点 $A(2, f(2))$ 与 $B(3, f(3))$ 连线所在直线的斜

率 k_{AB} , 所以结合图可知 $f(3) < k_{AB} < f'(2)$, 故 D 正确.

显然只有 $f(2) < f'(2) - f'(3) < f(3)$ 无法判断正误, 即 C 不一定正确.

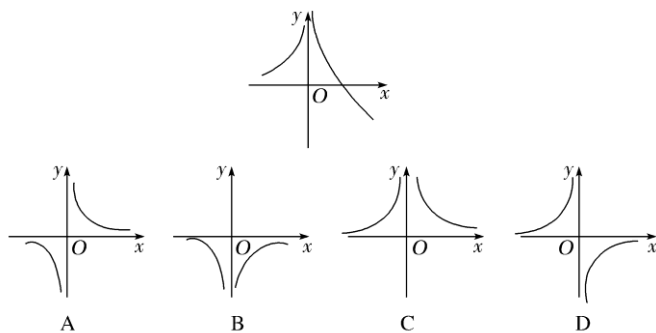
课后巩固作业

分层训练 · 提升能力

A 级 基础巩固

一、选择题

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 则 $y=f'(x)$ 的图象可能是()



答案 D

解析 由函数 $f(x)$ 的图象可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以在 $(-\infty, 0)$ 上, $f'(x) > 0$; 在 $(0, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$, 选项 D 满足.

2. 函数 $f(x) = 3 + x \ln x$ 的单调递减区间是()

- A. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
C. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$ D. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

答案 B

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf'(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f'(x)}{x^3} < 0,$$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 因此 $g(1) > g(2)$,

$$\text{即 } \frac{f(1)}{1^2} > \frac{f(2)}{2^2}, \text{ 所以 } 4f(1) > f(2).$$

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2e^x - 2e^{-x}$, 其中 e 为自然对数的底数, 若 $f(a-1) + f(2a^2)$

≤ 0 , 则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, -1]$ B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $(-1, \frac{1}{2})$ D. $[-1, \frac{1}{2}]$

答案 D

解析 $f(x) = x^2 - 4 + 2e^x + 2e^{-x} \geq x^2 - 4 + 2\sqrt{4e^x e^{-x}} = x^2 \geq 0$, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

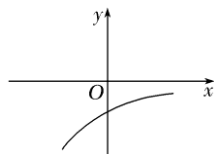
$$\text{又 } f(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + 2e^{-x} - 2e^x = -f(x), \text{ 知 } f(x) \text{ 为奇函数.}$$

$$\text{故 } f(a-1) + f(2a^2) \leq 0 \Leftrightarrow f(a-1) \leq f(-2a^2),$$

$$\therefore a-1 \leq -2a^2, \text{ 解之得 } -1 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

6. (多选题)(2021·重庆调研) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 其导函数

$f'(x)$ 的图象如图所示, 则对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$, 下列结论正确的是()



A. $f(x) < 0$ 恒成立

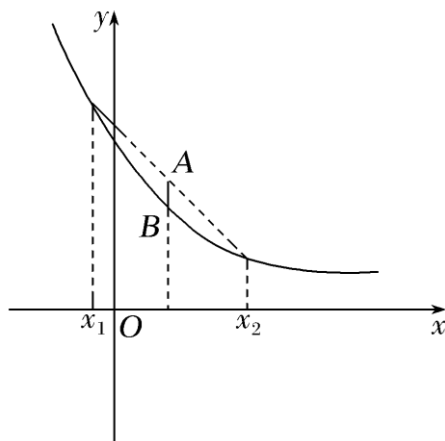
B. $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$

C. $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

D. $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

答案 BD

解析 由导函数的图象可知, 导函数 $f'(x)$ 的图象在 x 轴下方, 即 $f'(x) < 0$, 故原函数为减函数, 并且递减的速度是逐渐减慢. 所以 $f(x)$ 的示意图如图所示:



$f(x) < 0$ 恒成立, 没有依据, 故 A 不正确;

B 表示 $(x_1 - x_2)$ 与 $[f(x_1) - f(x_2)]$ 异号, 即 $f(x)$ 为减函数, 故 B 正确;

C, D 左边的式子意义为 x_1, x_2 中点对应的函数值, 即图中点 B 的纵坐标值, 右边式子代表的是函数值的平均值, 即图中点 A 的纵坐标值, 显然有左边小于右边, 故 C 不正确, D 正确.

二、填空题

7. 已知 a 为实数, $f(x) = ax^3 + 3x + 2$, 若 $f(-1) = -3$, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为_____.

答案 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

解析 $f(x) = ax^3 + 3x + 2$, 则 $f'(x) = 3ax^2 + 3$,

又 $f(-1) = 3a + 3 = -3$, 解得 $a = -2$,

$\therefore f(x) = -6x^2 + 3$, 由 $f(x) > 0$, 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8. (2020 长沙质检) 若函数 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 在其定义域的一个子区间 $(k-1, k+1)$ 内不是单调函数, 则实数 k 的取值范围是_____.

答案 $\left[1, \frac{3}{2}\right)$

解析 $f(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x} (x > 0)$,

令 $f(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{2}$;

令 $f(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$.

依题意, $\begin{cases} k-1 \geq 0, \\ k-1 < \frac{1}{2} < k+1, \end{cases}$ 解之得 $1 \leq k < \frac{3}{2}$.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(2)=0$, 当 $x > 0$ 时, 有 $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ 恒成立, 则不等式 $x^2 f(x) > 0$ 的解集是_____.

答案 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

解析 令 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$,

$\because$ 当 $x > 0$ 时, $\left[\frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$,

$\therefore \varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

又 $f(2)=0$, 即 $\varphi(2)=0$,

$\therefore$ 在 $(0, +\infty)$ 上, 当且仅当 $0 < x < 2$ 时, $\varphi(x) > 0$,

此时 $x^2 f(x) > 0$.

又 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore h(x) = x^2 f(x)$ 也为奇函数,

由数形结合知 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f(x) > 0$.

故 $x^2 f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

三、解答题

10. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + k}{e^x}$ (k 为常数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解 (1) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x - k}{e^x}$ ($x > 0$).

又由题意知 $f'(1) = \frac{1-k}{e} = 0$, 所以 $k=1$.

(2)由(1)知, $f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}(x>0)$.

设 $h(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1(x>0)$,

则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由 $h(1)=0$ 知, 当 $0<x<1$ 时, $h(x)>0$, 所以 $f(x)>0$;

当 $x>1$ 时, $h(x)<0$, 所以 $f(x)<0$.

综上 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, 1)$, 减区间为 $(1, +\infty)$.

11. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2a\ln x+(a-2)x$.

(1)当 $a=-1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)是否存在实数 a , 使函数 $g(x)=f(x)-ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增? 若存在, 求出 a 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

解 (1)当 $a=-1$ 时, $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\ln x-3x$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f'(x) &= x + \frac{2}{x} - 3 = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{x} (x>0). \end{aligned}$$

当 $0<x<1$ 或 $x>2$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $1<x<2$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 1)$ 和 $(2, +\infty)$, 单调减区间为 $(1, 2)$.

(2)假设存在实数 a , 使 $g(x)=f(x)-ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

则 $g'(x)=f'(x)-a=x-\frac{2a}{x}-2\geq 0$ 在 $x\in(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{x^2-2x-2a}{x}\geq 0$ 在 $x\in(0, +\infty)$ 上恒成立.

所以 $x^2-2x-2a\geq 0$ 在 $x>0$ 时恒成立,

所以 $a\leq \frac{1}{2}(x^2-2x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}$ 恒成立.

令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}$, $x\in(0, +\infty)$,

则其最小值为 $-\frac{1}{2}$.

所以当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立.

又当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$,

当且仅当 $x=1$ 时, $g'(x)=0$.

故当 $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 时, $g(x)=f(x)-ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

B 级 能力提升

12. 已知 $a = \ln\sqrt[3]{3}$, $b = e^{-1}$, $c = \frac{3\ln 2}{8}$, 则 a, b, c 的大小关系为()

A. $b > c > a$

B. $a > c > b$

C. $a > b > c$

D. $b > a > c$

答案 D

解析 依题意, 得 $a = \ln\sqrt[3]{3} = \frac{\ln 3}{3}$, $b = e^{-1} = \frac{\ln e}{e}$, $c = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{\ln 8}{8}$.

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$), 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e} = b$, 且 $f(3) > f(8)$, 即 $a > c$, 所以 $b > a > c$.

13. (多选题)(2021·日照模拟)若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = -1$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) > m > 1$, 则下列成立的有()

A. $f\left(\frac{1}{m}\right) > \frac{1-m}{m}$

B. $f\left(\frac{1}{m}\right) < -1$

C. $f\left(\frac{1}{m-1}\right) > \frac{1}{m-1}$

D. $f\left(\frac{1}{m-1}\right) < 0$

答案 AC

解析 由已知条件, 构造函数 $g(x) = f(x) - mx$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $g'(x) = f'(x) - m > 0$, 所

以函数 $g(x) = f(x) - mx$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $\frac{1}{m} > 0$, $g\left(\frac{1}{m}\right) > g(0)$, 故 $f\left(\frac{1}{m}\right) - 1 > -1$,

所以 $f\left(\frac{1}{m}\right) > 0$, 故 B 错误; 又 $\frac{1}{m} < 1$, $\frac{1-m}{m} < 0$, 所以 $f\left(\frac{1}{m}\right) > \frac{1-m}{m}$, 故 A 正确; $\frac{1}{m-1}$

>0 , 故 $g\left(\frac{1}{m-1}\right) > g(0)$, 所以 $f\left(\frac{1}{m-1}\right) - \frac{m}{m-1} > -1$, 即 $f\left(\frac{1}{m-1}\right) > \frac{1}{m-1} > 0$, 故

C 正确, D 错误, 故选 AC.

14. 已知函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$, 其中参数 $a \leq 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $a \leq 0$.

$$f'(x) = 2e^{2x} - ae^x - a^2 = (2e^x + a)(e^x - a).$$

① 若 $a = 0$, 则 $f(x) = e^{2x}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

② 若 $a < 0$, 则由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln\left(-\frac{a}{2}\right)$.

当 $x \in \left(-\infty, \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in \left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right), +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 上单调递减,

在区间 $\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right), +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) ① 当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^{2x} \geq 0$ 恒成立.

② 若 $a < 0$, 则由(1)得, 当 $x = \ln\left(-\frac{a}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right) = a^2\left[\frac{3}{4} - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right]$,

故当且仅当 $a^2\left[\frac{3}{4} - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right] \geq 0$,

即 $0 > a \geq -2e^{\frac{3}{4}}$ 时, $f(x) \geq 0$.

综上, a 的取值范围是 $[-2e^{\frac{3}{4}}, 0]$.