见微知著 慎思明辨*

——高三“函数最值”的微专题探究

215007 江苏省苏州中学 刘 炜

摘 要:以“函数最值”的微专题探究为例,构建“问题探究—变式训练—串讲激活—链接拓展”的高三数学教学模式,针对高三二轮复习微专题的设计,给予“见微知著”“慎思明辨”的建议,培养学生数学能力和思维,提升数学素养.

关键词:核心素养;微专题;高三复习;教学设计

“微专题”是指教师针对某一具体知识点、能力点、易错点或检测点,从其涉及的基本概念、基本原理或基本方法入手,精选例题和习题,编制成的能够在一节课或两节课内完成的专题(教学任务).其主要目的是帮助学生更好地弥补盲点、强化重点、突破难点、纠正易错点.[1]

函数最值问题是近年来高考、模考的热点话题,它不仅涉及函数、方程、不等式等诸多重要知识点,同时考查函数与方程、转化与化归、数形结合等核心数学思想,更体现了数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算等数学核心素养.苏州市教研员吴锷老师所倡导的微专题的教学模式为“激活-联想-串讲”,笔者借评讲期末考卷,应用该教学模式,针对函数最值(范围)问题进行了微专题探究.

1 教学过程

活动设计1 问题探究,揭示方法本质

问题 (2018苏州高三期末-14)已知直线 $y=a$ 分别与直线 $y=2x-2$,曲线 $y=2e^x+x$ 交于点 A,B,则线段 AB 长度的最小值为________.

师:本题并不陌生,是零模考试最后一道填空题,市区平均得分0.96分,班级平均得分2.43分,即有超过一半的同学在此出现了失误.现在回望本题,重温解题过程,总结解题得失,指导下一次解题.

生1:我拿到问题后想画图,由于是填空题,大致凭感觉画了函数图像.

师:这是很好的解题思路,那么一条直线与一条曲线的位置关系如何界定呢?

生1:应该可以作差比较,判断是否有公共点.

师:是的,可以作差形成新函数,从而判定该函数无零点,即说明直线在曲线的右下侧(作图).

生2:设 $A(x_1,a)$,$B(x_2,a)(x_1>x_2)$,则 $AB=x_1-x_2=\frac{a}{2}+1-x_2=\frac{1}{2}(2e^{x_2}+x_2)+1-x_2=e^{x_2}-\frac{1}{2}x_2+1$,记函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x+1$,则令其导函数 $f'(x)=e^x-\frac{1}{2}=0$,解得 $x=-\ln 2$,所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(-\ln 2)=\frac{3+\ln 2}{2}$.

师:这个解题过程无可挑剔,请问在 x_1,x_2 中为什么选择了 x_2?

生2:因为关于 x_1 的方程 $a=2x_1-2$ 可解,即 x_1 可以表示 a,但是关于 x_2 的方程 $a=2e^{x_2}+x_2$ 是超越方程,无法用含有 x_2 的表达式来表示 a.

师:看来是个无奈之举,但确实因此选择了合适的“主变量”,这是解决问题的关键,即“通过合理消元建立恰当的函数关系”.

设计意图:试卷评讲具有时效性和针对性,能提升学生自学探究的能力,养成自学反思的习惯,从而培养学生的核心素养.本题属于填空题中的难题,其关键是在多变量中选择主变量,对学生极具挑战性,成为函数考查的重点.虽然本题关注的技术比较简明,但数学思想深刻,需要认真分析才能解决,为此设计以下问题以切实巩固和灵活运用其思想.

活动设计2 变式训练,巩固操作技能

变式1 已知直线 $y=a$ 分别与直线 $y=3x+3$,曲线 $y=2x+\ln x$ 交于点 A,B,则线段 AB 长度的最小值为________.

生3:本题跟原题基本一致,可采用的方法也一致,可得线段 AB 长度的最小值为 $\frac{4}{3}$.

师:同样类型的问题,方法也是一致的,这是很

*国家社会科学基金“十三五”规划2016年度教育学一般课题“基于核心素养的书院制育人模式的实践研究”(BHA160149)的阶段成果之一.

好的成功体验.

变式2 已知直线 $y=x+a$ 分别与直线 $y=3x+3$，曲线 $y=2x+\ln x$ 交于点 A,B，则线段 AB 长度的最小值为________.

生4：画出图像，要计算线段 AB 的最小值即要计算横坐标差的最小值，于是建立目标函数即可得.

师：分析很到位，该问题是将原问题进行了再包装和加工，其本质与原问题一致. 面对问题的时候，要分析问题的本质，选择合适的方法. 本题的关键依旧是两个变量的选择问题.

设计意图：类似于活动设计1中的问题，本环节设计的变式1和变式2的相似之处就是选择主变量，建立数学模型，解决数学问题；不同之处在于变式2是变式1的递进，需要寻找本质，确定关键，即考察核心信息. 通过本环节的训练，学生的操作和实践使得技术成为自身的硬功夫，培养了数学素养.

活动设计3　串讲激活，培养化归能力

串讲1 已知直线 $y=a$ 与函数 $f(x)=\begin{cases}\log_4 x, x>0\\ \log_4(x), x<0\end{cases}$ 的图像分别交于点 A,B，则线段 AB 长度的最小值为________.

生5：不难判定，函数 $f(x)$ 是奇函数，根据图像，结合以上"套路"应该可求.

师：刚才讲到了"套路"，这似乎值得总结，其步骤是设点—反解—代换—建模—最值.

生5：设 $A(x_1,a)$，$B(x_2,a)(x_1>0,x_2<0)$，则 $a=\log_4 x_1$，$a=-\log_4(-x_2)$，从而 $x_1=4^a$，$-x_2=4^{-a}$，即 $-x_2=\frac{1}{x_1}$，所以 $x_1-x_2=x_1+\frac{1}{x_1}\geqslant 2$，当且仅当 $x_1=1$ 时取等号，因此线段 AB 长度的最小值为2.

师：方法基本一致，不论是同一个函数还是两个函数的关系都可以如此研究.

串讲2 已知直线 $y=-x+a$ 与函数 $f(x)=\begin{cases}\log_4 x, x>0\\ \log_4(x), x<0\end{cases}$ 的图像分别交于点 A,B，则线段 AB 长度的最小值为________.

生5：借鉴串讲1和变式2，本题应该可以求解.

师：刚才的成功体验使你们对这解道题信心满满，请尝试解出.

生5：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1>0,x_2<0)$，则 $-x_1+a=\log_4 x_1$，$-x_2+a=-\log_4(-x_2)$.（思维停顿）

师：以上成功的经验，在于变量之间可以相互表示，那么现在陷入困境的是什么？

生5：x_1,x_2,a 无法相互表示，所以建立目标函数的想法似乎没有可行性.

师：那么现在还能做什么？对照我们的目标！

生5：似乎只能找 x_1,x_2 之间的相互依赖关系.

生6：可以消去 a，得 $x_1-x_2=-\log_4(-x_1x_2)$.

师：这一步的处理是相当有价值的，是历史性的进展. 最值的处理不仅可以从函数角度出发，也可以从不等式的角度处理.

生7：由于 $-x_1x_2\leqslant\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2$，从而 $x_1-x_2=-\log_4(-x_1x_2)\geqslant-\log_2(x_1-x_2)+1$. 设 $u=x_1-x_2>0$，则不等式转化为 $u\geqslant-\log_2 u+1$. 令 $\varphi(u)=u+\log_2 u-1$，又 $\varphi'(u)=1+\frac{1}{u\ln 2}>0$，即 $\varphi(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；又因为 $\varphi(1)=0$，所以 $u\geqslant 1$，又 $AB=\sqrt{2}(x_1-x_2)$，故 AB 长度的最小值为 $\sqrt{2}$.

师：这段处理很机智，也是必然的. 最值也就是范围的边界，范围可以通过两种渠道得到，即目标函数求值域，或者利用不等关系解范围.

串讲3 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_4 x, x>0\\ \log_4(-x), x<0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)+x-a$ 的两零点分别为 x_1，x_2，则 x_1x_2 的最小值为________.

生8：直接用串讲2中的结论可以求得. 由 $-\log_4(-x_1x_2)=x_1-x_2\geqslant 2\sqrt{-x_1x_2}$，设 $v=\sqrt{-x_1x_2}$，则 $-\log_2 v\geqslant 2v$，由于 $h(v)=2v+\log_2 v$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且 $h(\frac{1}{2})=0$，因此 $v\leqslant\frac{1}{2}$，从而 $-x_1x_2\leqslant\frac{1}{4}$，所以 $x_1x_2\geqslant-\frac{1}{4}$，即 x_1x_2 的最小值为 $-\frac{1}{4}$.

师：这次的操作借鉴得相当得体. 可以做一点小结，从方法的角度来说，范围或者最值可使用目标函数或者不等关系进行解决；从策略的角度来说，变量的选择可通过相互消元或者整体表示来处理.

设计意图：活动2与活动3的区别在于，活动2中的变量选择简明，活动3的变量需要构造，这是本环节最重要的教学，也是整节课最重要的部分，能够让学生深入领会问题的本质，识别和理解解题思想，形成和强化解题原理. 本环节设计了三道小问题，它们从前往后层层铺垫，串讲1在于选择变量，串讲2在于构造变量，串讲3在于构造关系，让学生利用已有的数学经验构建新的数学方法，"激活"学生的技术，促进学生的思维发展和培养良好的学习习惯.

活动设计4　链接拓展，提升数学素养

链接（2014天津高考改编）设 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，$x\in\mathbf{R}$. 当 $a\in(0,e^{-1})$ 时，方程 $a=g(x)$ 有两解 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，判断下列结论是否正确？(1) $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大；(2) x_1+x_2 随着 a 的减小而增大.

生9:问(1)很好判断,结合图像即可,当a减小时,x_1减小,x_2增大,所以$\frac{x_2}{x_1}$增大.

师:你的解题感觉很好,对论证的问题再进行讨论.那么问(2)呢?由于方程$x_1=ae^{x_1}$,$x_2=ae^{x_2}$均无法解出,即x_1,x_2无法用a表示,无法形成关于a的目标函数.是否可以尝试用已有的关系来表示?

生9:由题意可知,$\frac{x_2}{x_1}=e^{x_2-x_1}$,从而$x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}$,因此可以尝试用$\frac{x_2}{x_1}$来表示$x_1$,$x_2$.设$t=\frac{x_2}{x_1}>1$,则由$\begin{cases}x_2=tx_1\\x_2-x_1=\ln t\end{cases}$得$x_1=\frac{\ln t}{t-1}$,$x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$,所以$x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$,如此只需要研究关于$t$的函数单调性即可.

师:的确,这是相当有效的研究,把对本来变量a的问题转化为已有关系t的问题,在函数研究的过程中要灵活地对变量进行选择和代换.

设计意图:本环节选择"链接"高考,目的在于利用构建变量的方式解决多变量的最值问题,是对前三个环节方法的总结,也是对前三个环节学习的检验.本环节的重点依旧是选择或转化为"单变元"函数问题,难点是根据条件构建"新变量"的函数问题,由此真正实现"慎思明辨",领悟数学学习的精髓,让难点自然突破,认知自然形成,信心自然生成,学生的数学素养自然提升,达到"润物无声"的效果.

2 教学感悟

当代美国著名数学家P. R. Halmos有一句名言:问题是数学的心脏.这说明问题能够推动数学学科的发展,也表达了问题能够推动数学思维的发展.问题解决的教学是数学教学最朴实的教学形态,如何让问题教学切实有效?更确切地说,如何让高三数学思维和素养的培养更有效?笔者认为,课堂时间十分有限,因此需从两方面着手,即"引入问题切入小,系列问题思辨强",如此培养学生数学能力和思维,提升数学素养.

2.1 见微知著

清人陈廷焯《白雨斋词话》有云:"盖兵贵精不贵多,精则有所专注,多则散乱无纪."因此,引入问题宜简明,这有利于教师把握教学,学生理解知识.

从教师的角度而言,问题切入较小,方法模式较强,这样才能让教师对问题的分析和讲解更加透彻,做到一点深钻,一例通透.本次教学便是围绕考试中的一道填空题,从思想的层面解决变量选择的关键,从技术的层面确定变量选择的要领,从而实现能力和素养的稳固.继而从形式相似进行变式,从方法相异加以总结,最终实现函数最值问题中变量选择的突破,形成教师比较容易掌控的课堂.

从学生角度而言,引入的问题能够唤醒已有知识,顺应既定思维,才能让学生有能力、有信心继续挑战问题.对准精炼的系列问题,思维必将专注,也更容易强化,继而稳固逐渐形成的数学素养,真正实现"涓滴溪流形成浩瀚海洋".

2.2 慎思明辨

现代认知心理学认为:思维惰性、思维定势等障碍诱导学生进入思维误区,使学生在习惯模式的引导下陷入思维盲点,阻碍问题的顺利解决,同时妨碍思维灵活性和创造性的发展.[2]因此,需要学生"慎思明辨":慎思,形成周全思考的习惯;明辨,形成清晰判断的能力.

本专题的教学设计通过变式巩固方法与技能,做到知识的同化和顺应,形成思维定势;通过串讲辨析形式与本质,做到思想的突破与创新,打破思维定势.通过链接在"立"和"破"之后形成"否定之否定",形成数学问题解决的"正念".由此,数学教学需要在变式中巩固思维习惯,在激活中培植辨析能力,才能真正提升数学素养.

参考文献

[1] 韩保席.高三数学微专题教学的探索与思考[J].基础教育参考,2016(20):46.

[2] 殷伟康,冯国昌.把握数学本质 凸显数学思维——高三微专题"多元函数的最值问题"复习课[J].上海中学数学,2017(1/2):80.

(上接第22页)

易连接的.习题教学的意义不在于检测学生的课堂解题能力,而在于方法的传授与解题方式的完善,着力点是引导学生学会"怎样转化"和"如何类化".因此,对于例题,不妨让学生课外先思考,课堂上更多地让学生展示解题方法,通过"你是怎么想到的"挖掘解题思路的生成过程,借助"目标分析法"和"知识溯源"把思路生成的随机性转化为分析的必然性,妙用"本题属于什么类型"和"同一类型还可怎么做"引领学生进行迁移性的深度思考,必然能完善学生的思维方式,全面提升分析问题的能力,达到"以题会类"的习题教学最高境界.

专题复习的着力点主要在于"知识梳理""题型类化"和"能力迁移",课前选题和课堂教学唯有围绕这三点开展,才能有效突出专题复习之本.