

## 2021 届高三年级第二学期期初调研考试

### 数学试题

#### 注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

**一、单项选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 若非空且互不相等的集合  $M$ ， $N$ ， $P$  满足： $M \cap N = M$ ， $N \cup P = P$ ，则  $M \cup P =$

- A.  $\emptyset$                       B.  $M$                       C.  $N$                       D.  $P$

2. 在复平面内，复数  $\frac{1+i}{2-i}$  对应的点位于

- A. 第一象限              B. 第二象限              C. 第三象限              D. 第四象限

3. 2 月 18 日至 28 日在张家口举办国际雪联自由式滑雪和单板滑雪世界锦标赛.现组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作，若其中小张和小赵只能从事前两项工作，其余三人均能从事这四项工作，则不同的选派方案的种数为

- A. 12                      B. 24                      C. 36                      D. 48

4. 已知双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{m} = 1$  的右焦点到其一条渐近线的距离为  $\sqrt{3}$ ，则双曲线的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$                       D. 2

5.  $(2+3x^2)(1+x)^4$  的展开式中  $x^3$  的系数为

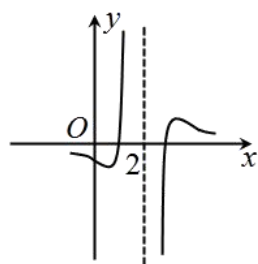
A . 16

B . 18

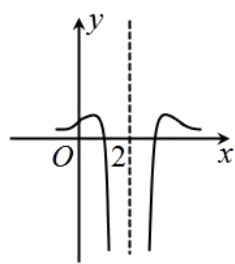
C . 20

D . 24

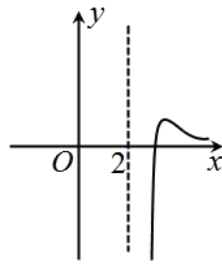
6 . 函数  $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{(x-2)^3}$  的部分图象大致为



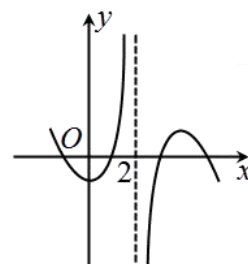
A.



B.



C.



D.

7 . 中长跑是一项对学生身体锻炼价值较高的运动项目.在某校的一次中长跑比赛中,全体参赛学生的成绩近似地服从正态分布  $N(80,100)$ , 已知成绩在 90 分以上 (含 90 分) 的学生有 32 名.则参赛的学生总数约为

( 参考数据:  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.683$  ,  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.954$  ,

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.997$  )

A . 208

B . 206

C . 204

D . 202

8 . 定义方程  $f(x) = f'(x)$  的实数根  $x_0$  叫作函数  $f(x)$  的“保值点”.如果函数  $g(x) = x$  与函数  $h(x) = \ln(x+1)$  的“保值点”分别为  $\alpha, \beta$ , 那么  $\alpha$  和  $\beta$  的大小关系是

A .  $\alpha < \beta$ B .  $\alpha > \beta$ C .  $\alpha = \beta$ 

D . 无法确定

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9 . 甲、乙、丙、丁四人参加数学竞赛，四人成绩公布前作出如下猜测：

甲预测说：我不会获奖，丙获奖；

乙预测说：甲和丁中有一人获奖；

丙预测说：甲的猜测是对的；

丁预测说：获奖者在甲、乙、丙三人中.

成绩公布表明，四人的预测中有两人的预测与结果相符，另外两人的预测与结果不符.已知有两人获奖，则获奖者可能是

A . 甲和乙

B . 乙和丙

C . 甲和丙

D . 乙和丁

10. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 在  $[0, 2\pi]$  有且仅有 4 个零点, 则

A.  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{5}\right)$  单调递增      B.  $\omega$  的取值范围是  $\left[\frac{19}{10}, \frac{12}{5}\right)$

C.  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  有 2 个极小值点      D.  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  有 3 个极大值点

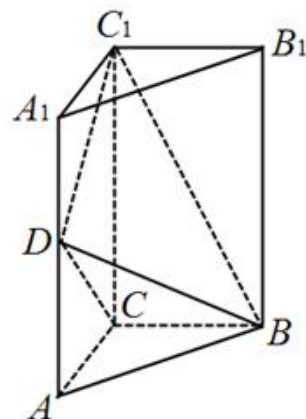
11. 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC = BC = 1$ ,  $AA_1 = 2$ ,  $D$  是棱  $AA_1$  的中点,  $DC_1 \perp BD$ . 则

A. 直线  $DC_1$  与  $BC$  所成角为  $90^\circ$

B. 三棱锥  $D - BCC_1$  的体积为  $\frac{1}{3}$

C. 二面角  $A_1 - BD - C_1$  的大小为  $60^\circ$

D. 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  外接球的表面积为  $6\pi$



12. 已知函数  $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - x}$ , 则

A.  $f(x)$  是奇函数

B.  $|f(x)| < 1$

C.  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  单调递增

D.  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上存在一个极值点

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把正确答案填在题中横线上.**

13. 已知  $|a| = 2$ ,  $|b| = 1$ ,  $|a + 2b| = \sqrt{6}$ , 则  $\cos\langle a, b \rangle =$  \_\_\_\_\_.

14. 一台设备由三个部件构成, 假设一天的运转中, 部件 1, 2, 3 需要调整的概率分别为 0.1, 0.2, 0.3, 各部件的状态相互独立. 则设备在一天的运转中, 至少有 1 个需要调整的概率为 \_\_\_\_\_.

15. 写出一个满足  $f(x) = f(2 - x)$  的偶函数  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

16. 焦点为  $F$  的抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上一点  $M$ ,  $|MF| = 4$ , 若以  $MF$  为直径的圆过点  $(0, 2)$ , 则圆心坐标为 \_\_\_\_\_, 抛物线的方程为 \_\_\_\_\_.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17 .( 10 分 ) 在①  $S_8 = 72$  , ②  $S_5 = 6a_2$  , ③  $S_6 = S_4 + a_3$  这三个条件中任选一个 , 补充在下面问题中 , 并完成解答.

问题 : 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$  ,  $a_3 = 6$  , \_\_\_\_\_ , 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = 2^{a_n}$  .

求数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  .

注 : 如果选择多个条件分别解答 , 按第一个解答计分.

18 .( 12 分 ) 在  $\triangle ABC$  中 , 角  $A$  ,  $B$  ,  $C$  所对的边分别为  $a$  ,  $b$  ,  $c$  , 已知  $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos C}{c} = \frac{1}{2}$  , 且  $b = 2$  .

( 1 ) 证明 :  $a + c \geq 4$  ;

( 2 ) 若  $\triangle ABC$  的周长为  $2 + 3\sqrt{2}$  , 求其面积  $S$  .

19 .( 12 分 ) 机动车行经人行横道时 , 应当减速慢行 ; 遇行人正在通过人行横道 , 应当停车让行 , 俗称 “礼让行人” . 下表是某市一主干路口监控设备所抓拍的 5 个月内驾驶员不 “礼让行人” 行为统计数据 :

| 月份      | 1   | 2   | 3   | 4  | 5  |
|---------|-----|-----|-----|----|----|
| 违章驾驶员人数 | 120 | 105 | 100 | 95 | 80 |

( 1 ) 请利用所给数据求违章人数  $y$  与月份  $x$  之间的回归直线方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  ;

( 2 ) 预测该路口 9 月份的不 “礼让行人” 违章驾驶员人数 ;

( 3 ) 交警从这 5 个月内通过该路口的驾驶员中随机抽查 70 人 , 调查驾驶员不 “礼让行人” 行为与驾龄的关系 , 得到下表 :

|           | 不礼让行人 | 礼让行人 |
|-----------|-------|------|
| 驾龄不超过 1 年 | 24    | 16   |
| 驾龄 1 年以上  | 16    | 14   |

能否据此判断有97.5%的把握认为“礼让行人”行为与驾龄有关？

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \quad (\text{其中 } n = a + b + c + d)$$

|                    |       |       |       |       |       |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P(\chi^2 \geq k)$ | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 |
| $k$                | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

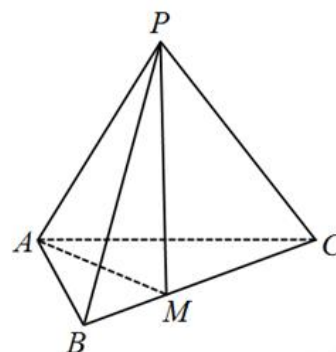
20 (12分) 如图, 在三棱柱  $P-ABC$  中,  $AB=BC=2\sqrt{2}$ ,  $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ ,  $PA=PB=PC=4$ .

(1) 证明: 平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ;

(2) 若点  $M$  在棱  $BC$  上,  $PC$  与平面  $PAM$  所成角的余弦值

为

$\frac{\sqrt{13}}{4}$ , 求  $CM$  的长.

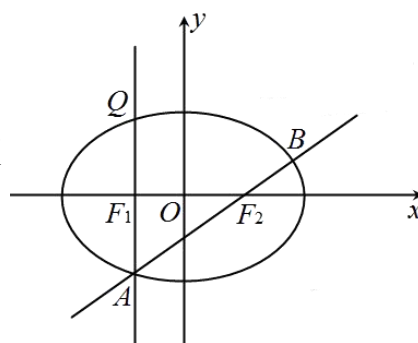


21 (12分) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 过椭圆的左、右焦点  $F_1, F_2$  分

别作倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$  的两条直线, 且这两条直线之间的距离为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆  $E$  的标准方程;

(2) 过  $F_2$  与坐标轴不垂直的直线  $l$  与椭圆交于  $A, B$  两点. 过点  $A$  作与  $x$  轴垂直的直线与椭圆交于点  $Q$ , 证明: 直线  $QB$  过定点.



22 . ( 12 分 ) 已知函数  $f(x) = e^x - 1$  ,  $g(x) = a \sin x$  ,  $a \in \mathbf{R}$  .

( 1 ) 若  $a = -1$  , 证明 : 当  $x \geq 0$  时 ,  $f(x) \geq g(x)$  ;

( 2 ) 讨论  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$  在  $x \in [0, \pi]$  上零点的个数.