

兖州区高三网络模拟考试

数学试题

一、单项选择题：本题共 8 分，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中有一项是符合题目要求的.

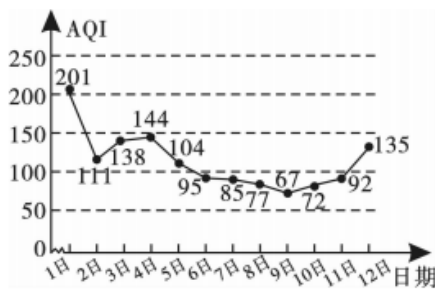
1.已知集合 $A = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | y = \lg(2-x)\}$ 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(0,2)$ B. $(-\infty,2]$ C. $(-\infty,2)$ D. $(0,2]$

2.若复数 $\frac{2a+2i}{1+i}$ ($a \in \mathbb{R}$) 是纯虚数,则复数 $2a+2i$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3.AQI 即空气质量指数, AQI 越小,表明空气质量越好,当 AQI 不大于 100 时称空气质量为“优良”.如图是某市 3 月 1 日到 12 日 AQI 的统计数据.则下列叙述正确的是 ()



- A. 这12天的 AQI 的中位数是 90
- B. 12 天中超过 7 天空气质量为“优良”
- C. 从 3 月 4 日到 9 日,空气质量越来越好
- D. 这12天的 AQI 的平均值为100

4.直线 $l: 2x - y + e = 0$ 的倾斜角为 α , 则 $\sin(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

5.已知正数 m , n 满足 $m(n-1) = 8n$, 则 $m+2n$ 的最小值是 ().

- A. 18 B. 16 C. 8 D. 10

6.等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $AC = BC = 2$, 点 P 是斜边 AB 上一点, 且 $BP = 2PA$, 那么

$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} =$ ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

7.《易经》是中国传统文化中的精髓，下图是易经八卦图（含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦），每一卦由三根线组成（**—**表示一根阳线，**——**表示一根阴线），从八卦中任取两卦，这两卦的六根线中恰有三根阳线和三根阴线的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{14}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{5}{28}$ D. $\frac{5}{14}$

8.已知函数 $g(x) = e^x - e^{-x}$, $f(x) = xg(x)$, 若 $a = f\left(-\frac{5}{2}\right)$, $b = f\left(\frac{3}{2}\right)$, $c = f(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为（ ）

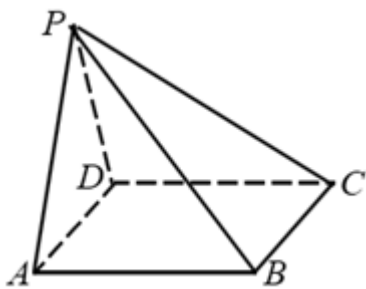
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9.下列判断正确的是（ ）

- A. 命题 $p: \exists x > 0$, 使得 $x^2 + x + 1 < 0$, 则 p 的否定: “ $\forall x \leq 0$, 都有 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”
- B. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 成等差数列的充要条件是 $B = \frac{\pi}{3}$;
- C. 线性回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 必经过点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的中心点 $(\bar{x}, \bar{y})$
- D. 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq 4) = 0.79$, 则 $P(\xi \leq -2) = 0.21$;

10.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle DAB = 60^\circ$ ，侧面 PAD 为正三角形，且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，则下列说法正确的是（ ）



- A. 在棱 AD 上存在点 M , 使 $AD \perp$ 平面 PMB
- B. 异面直线 AD 与 PB 所成的角为 90°
- C. 二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45°
- D. $BD \perp$ 平面 PAC

11. 已知向量 $\vec{m} = (\sin x, -\sqrt{3})$, $\vec{n} = (\cos x, \cos^2 x)$, 函数 $f(x) = 2\vec{m} \cdot \vec{n} + \sqrt{3} + 1$, 下列命题, 说法正确的选项是 ()

- A. $f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2 - f(x)$
- B. $f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ 的图像关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
- C. 若 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$
- D. 若 $x_1, x_2, x_3 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_3)$

12. 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, 斜率 k 为的直线不经过原点 O , 而且与椭圆相交于 A, B 两点, M 为线段 AB 的中点. 下列结论正确的是 ()

- A. 直线 AB 与 OM 垂直;
- B. 若点 M 坐标为 $(1, 1)$, 则直线方程为 $2x + y - 3 = 0$;
- C. 若直线方程为 $y = x + 1$, 则点 M 坐标为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$
- D. 若直线方程为 $y = x + 2$, 则 $|AB| = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

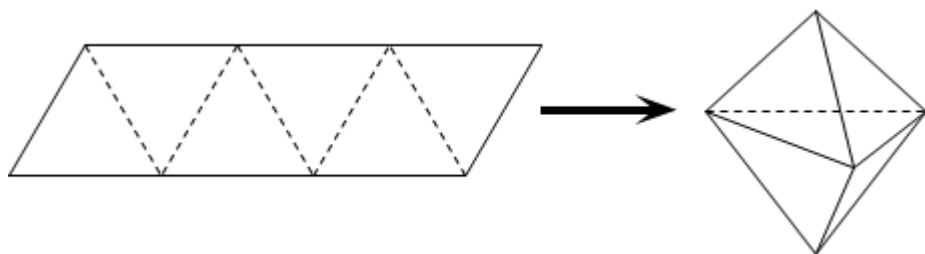
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, x^3 项的系数是_____.

14. 以双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 $F(c, 0)$ 为圆心, a 为半径的圆与 C 的一条渐近线交于 A, B 两点, 若 $|AB| = \frac{2}{3}c$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

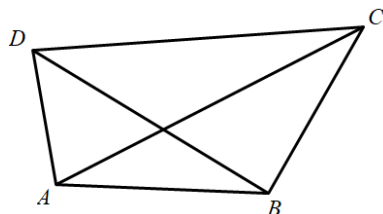
15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & x \in (-2, 2] \\ 1-|x-3|, & x \in (2, 4] \end{cases}$ 满足 $f(x-3) = f(x+3)$, 若在区间 $[-4, 4]$ 内关于 x 的方程 $3f(x) = k(x-5)$ 恰有 4 个不同的实数解, 则实数 k 的取值范围是_____.

16. 农历五月初五是端午节, 民间有吃粽子的习惯, 粽子又称粽粿, 俗称“粽子”, 古称“角黍”, 是端午节大家都会品尝的食品, 传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原. 如图, 平行四边形形状的纸片是由六个边长为 1 的正三角形构成的, 将它沿虚线折起来, 可以得到如图所示粽子形状的六面体, 则该六面体的体积为____; 若该六面体内有一球, 则该球体积的最大值为_____.



四：解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADB = 45^\circ, \angle BAD = 105^\circ, AD = \frac{\sqrt{6}}{2}, BC = 2, AC = 3$



(1) 求 $\cos \angle ABC$ 的值;

(2) 若记 $\angle ABC = \alpha$, 求 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

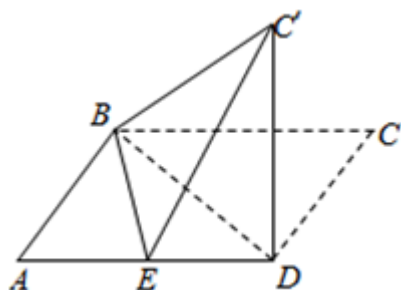
18. 在① $a_3 = 5, a_2 + a_5 = 6b_2$; ② $b_2 = 2, a_3 + a_4 = 3b_3$; ③ $S_3 = 9, a_4 + a_5 = 8b_2$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 1)$, 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 且 $a_1 = b_1, d = q$, _____.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

19. 已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ， $AD=2$ ， $AB \perp BD$ ， E 是线段 AD 的中点，沿 BD 将 $\triangle BCD$ 翻折到 $\triangle BC'D$ ，使得平面 $BC'D \perp$ 平面 BCD 。



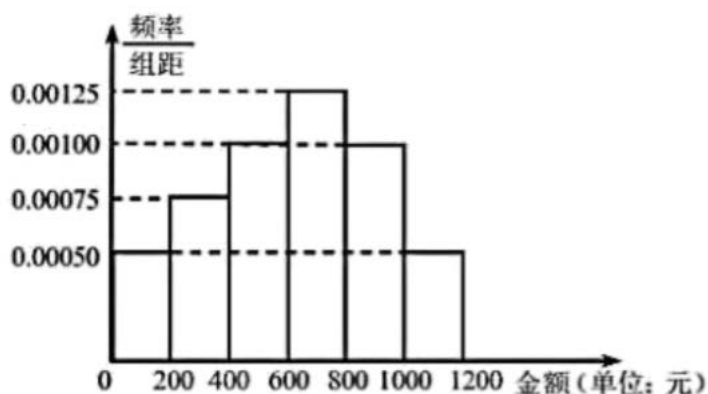
- (1) 求证： $C'D \perp$ 平面 BCD ；
- (2) 求二面角 $E-BC'-D$ 的余弦值。

20. 已知抛物线 $E: y = x^2$ ，的焦点为 F ，过点 F 的直线 l 的斜率为 k ，与抛物线 E 交于 A ， B 两点，抛物线在点 A ， B 处的切线分别为 l_1 ， l_2 ，两条切线的交点为 D 。

- (1) 证明： $\angle ADB = 90^\circ$ ；
- (2) 若 $\triangle ABD$ 的外接圆 Γ 与抛物线 C 有四个不同的交点，求直线 l 的斜率的取值范围。

21. 某健身馆在 2019 年 7、8 两月推出优惠项目吸引了一批客户. 为预估 2020 年 7、8 两月客户投入的健身消费金额，健身馆随机抽样统计了 2019 年 7、8 两月 100 名客户的消费金额，分组如下：

$[0, 200)$, $[200, 400)$, $[400, 600)$, ..., $[1000, 1200]$ (单位：元)，得到如图所示的频率分布直方图：



(1) 若把 2019 年 7、8 两月健身消费金额不低于 800 元的客户，称为“健身达人”，经数据 处理，现在列联表中得到一定的相关数据，请补全空格处的数据，并根据列联表判断是否有 95% 的把握认为“健身达人”与性别有关？

	健身达人	非健身达人	总计
--	------	-------	----

男	10		
女		30	
总计			

(2) 为吸引顾客，在健身项目之外，该健身馆特别推出健身配套营养品的销售，现有两种促销方案.

方案一：每满 800 元可立减 100 元；

方案二：金额超过 800 元可抽奖三次，每次中奖的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且每次抽奖互不影响，中奖 1 次打 9 折，中奖 2 次打 8 折，中奖 3 次打 7 折.

若某人打算购买 1000 元的营养品，请从实际付款金额的数学期望的角度分析应该选择哪种优惠方案.

(3) 在 (2) 中的方案二中，金额超过 800 元可抽奖三次，假设三次中奖结果互不影响，且三次中奖的概率为 $\sin A, \sin B, \sin C$ ，记 A, B, C 为锐角 $\triangle ABC$ 的内角，

求证： $\sin A + \sin B + \sin C - \sin A \sin B - \sin A \sin C - \sin B \sin C + \sin A \sin B \sin C < 1$

附：

$P(K^2 \geq k)$	0.150	0.100	0.050	0.010	0.005
k	2.072	2.706	3.841	6.635	7.879

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

22.已知函数 $f(x) = 2\ln x - ax$ ， $a \in R$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 当 $a = -1$ 时，令 $g(x) = x^2 - f(x)$ ，其导函数为 $g'(x)$ ，设 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个零点，判断 $\frac{x_1 + x_2}{2}$

是否为 $g'(x)$ 的零点？并说明理由.

