江苏省仪征中学2020届高三（下）五月扬州统测考前热身练习1（Ⅰ卷）

班级______________　姓名______________　学号______________　评价______________

一、填空题

1．已知集合 A＝{0，1，2}，B＝{－1，0，1}，则集合 A$\cap$B 中元素的个数为_______个.

2．复数 $z=\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）在复平面内对应的点位于实轴上，则实数 a 的值为_______.

3．一组数据 3，6，x，5，7，6 的平均数为 6，则该组数据的方差为_______.

4．根据如图所示的伪代码，最后输出的 i 的值为_______.

```
T←1
i←1
While T<10
    T←T+i
    i←i+2
End  While
Print  i
```

第 4 题

5．若 a，$b\in${－1，1，2}，则函数 $f(x)=ax^2+2x+b$ 有零点的概率为_______.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的右焦点为 F，过点 F 作双曲线的一条渐近线的垂线，垂足为 E．若 EF＝2OE，则双曲线的离心率为_______.

7．已知圆锥的侧面展开图是一个半径为 4，面积为 4π 的扇形，则该圆锥的高为_______.

8．若将函数 $f(x)=\sin\omega x\,(0<\omega<4)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后，所得图象关于 y 轴对称，则实数 ω 的值为_______.

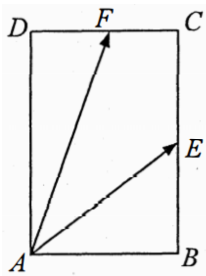
9．已知函数 $y=m(\cos x-\sqrt{3})$ 的图象在点 P($\dfrac{5\pi}{6}$，n) 处的切线与直线 $x-y$＝0 平行，则 n 的值为_______.

10．设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2+a_8=4$，$a_7^2-a_3^2=32$，则 S_{10} 的值为_______.

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-2，& x\ge 0\\ -f(-x)，& x<0\end{cases}$，则不等式 $f(x)\le 1$ 的解集为_______.

12．已知 $a>1$，$b>1$，$ab=4$，则 $\dfrac{\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2(2a)}$ 的最大值为_______.

13．如图，在矩形 ABCD 中，AB＝4，BC＝6，E，F 分别是 BC 和 CD 的中点，若 P 是矩形 ABCD 内一点（含边界），满足 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\mu\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，则 $\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF}}$ 的最小值为_______.

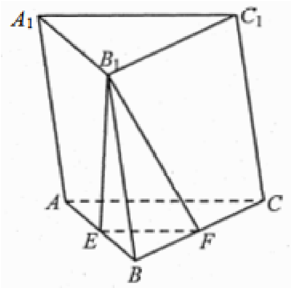


第 13 题

14．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2+y^2=1$，点 A(－1，0)，过圆 C 外一点 P(a，b)作圆 C 的切线，切点为 T．若 PA$\geqslant\sqrt{2}$PT，则 $|2a+b|+|8-a-2b|$ 的取值范围是_______.

二、解答题

15．如图，在三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1⊥底面 ABC，AB⊥AC，E，F 分别是棱 AB，BC 的中点．求证：



（1）A_1C_1∥平面 B_1EF；

（2）AC⊥B_1E．

16．在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知 a，b，c 成等差数列，且 $3a\sin C-4c\sin B=0$．

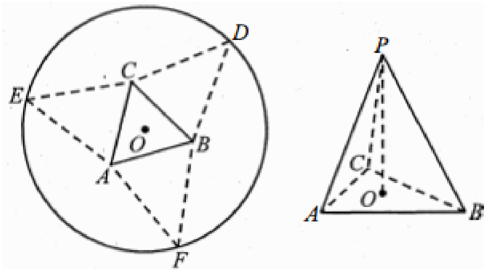
（1）求 $\cos A$ 的值；

（2）求 $\sin(2A+\frac{\pi}{3})$．

17．如图，要利用一半径为5cm的圆形纸片制作三棱锥形包装盒．已知该纸片的圆心为O，先以O为中心作边长为$2x$（单位：cm）的等边三角形ABC，再分别在圆O上取三个点D，E，F，使△DBC，△ECA，△FAB分别是以BC，CA，AB为底边的等腰三角形．沿虚线剪开后，分别以BC，CA，AB为折痕折起△DBC，△ECA，△FAB，使得D，E，F重合于点P，即可得到正三棱锥P—ABC．

（1）若三棱锥P—ABC是正四面体，求x的值；

（2）求三棱锥P—ABC的体积V的最大值，并指出相应x的值．

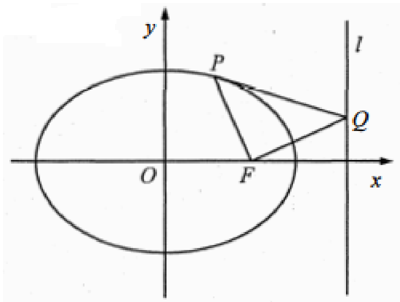


18．如图，在平面直角坐标系xOy中，已知F是椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(a>0)$的右焦点，P是椭圆C上位于$x$轴上方的任意一点，过F作垂直于PF的直线交其右准线l：$x=2$于点Q．

（1）求椭圆C的方程；

（2）若$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PF}=\dfrac{9}{8}$，求证：直线PQ与椭圆C相切；

（3）在椭圆C上是否存在点R，使四边形OQPR是平行四边形？若存在，求出所有符合条件的点R的坐标：若不存在，请说明理由．



19．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=6$，$a_2=-3$．

（1）若$a_n+a_{n+1}=2a_{n+2}\,(n\in\mathrm{N}^*)$．①设$b_n=a_{n+1}-a_n$，求证：数列$\left\{b_n\right\}$是等比数列；②若数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和$S_n$满足$S_n\le m\,(n\in\mathrm{N}^*)$，求实数$m$的最小值：

（2）若数列$\left\{a_n\right\}$的奇数项与偶数项分别成等差数列，且$a_n>a_{n+1}(n\in\mathrm{N}^*)$，$a_3+a_4=-33$，求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式.

20．已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2a+1}{2x}+a\,(a\in\mathrm{R})$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数.

（1）若$f'(1)=g(2)$，求a的值；

（2）设$h(x)=f(x)+g(x)$.

①若函数$h(x)$在定义域上单调递增，求a的取值范围；

②若函数$h(x)$在定义域上不单调，试判定$h(x)$的零点个数，并给出证明过程.

班级________ 姓名________ 学号________ 评价________

21．点 P(2，1)经矩阵 M＝$\begin{bmatrix}-1 & a \\ b & 4\end{bmatrix}$变换后得到点 P′在直线 l：$2x-y-2=0$ 上，且矩阵 M 不存在逆矩阵，求实数 a，b 的值．

22．　在极坐标系中，圆 C 的方程为 $\rho=2m\cos\theta$ ($m\neq0$)，以极点为坐标原点，极轴为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系．设直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\end{cases}$（$t$ 为参数），若直线 l 与圆 C 恒有公共点，求 m 的取值范围．

23. 一个均匀的正四面体的四个面分别涂有 1，2，3，4 四个数字，现随机投掷两次，正四面体底面上的数字分别为x_1，x_2，记$X=(x_1-3)^2+(x_2-3)^2$.

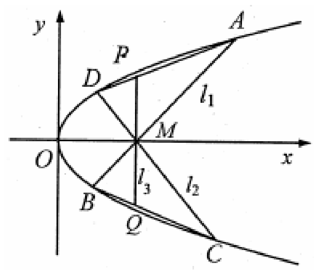
（1）记 X 取得最大值时的概率；

（2）求 X 的概率分布及数学期望 $E(X)$.

24. 如图，已知抛物线$y^2=2px\,(p>0)$，在 x 轴正半轴上有一点 M(t，0)(t>0)，过点 M 作直线 l_1，l_2分别交抛物线于点 A，B，C，D，过点 M 作 l_3垂直于 x 轴分别交 AD，BC 于点 P，Q．当 $t=\dfrac{1}{2}p$，直线 l_1的斜率为 1 时，AB＝4.

（1）求抛物线的方程；

（2）判断$\dfrac{\text{MP}}{\text{MQ}}$是否为定值，若是，求出此定值；若不是，请说明理由.



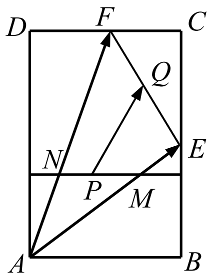
江苏省仪征中学2020届高三（下）五月扬州统测考前热身练习1（Ⅰ卷）参考答案

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分.

1． 2　　**2．** -1　　**3．** $\frac{10}{3}$　　**4．** 7　　**5．** $\frac{2}{3}$　　**6．** $\sqrt{5}$　　**7．** $\sqrt{15}$

8． $\frac{3}{2}$　　**9．** $3\sqrt{3}$　　**10．** 30　　**11．** $(-\infty,1-\sqrt{2}]\cup[0,1]$　　**12．** $4-2\sqrt{3}$

13．【答案】$\frac{29}{16}$



（第 13 题）

【解析】由 $4\lambda+8\mu=3$，得 $\frac{4}{3}\lambda+\frac{8}{3}\mu=1$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\lambda\left({}_{4}\overrightarrow{AE}\right)+\frac{8}{3}\mu\left({}_{8}\overrightarrow{AF}\right)$.

取 $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AF}$，则 P，M，N 三点共线，

即点 P 在直线 MN（$MN//AB$）上，且位于矩形内部（含端点），如图.

设 EF 的中点为 Q，则 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PQ}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}^2$.

因为 $AB=4$，$BC=6$，E，F 分别是 BC 和 CD 的中点，

所以 $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{13}$，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 的最小值为 $\frac{81}{16}$，

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最小值为 $\frac{29}{16}$.

14．【答案】$\left[9-2\sqrt{2},5+6\sqrt{2}\right]$

【解析】由 $PA\geqslant\sqrt{2}PT$，即 $PA^2\geqslant 2PT^2$，所以 $(a+1)^2+b^2\geqslant 2(a^2+b^2-1)$，

化简得，$(a-1)^2+b^2\leqslant 4$，

所以点 $P(a，b)$ 在圆 C 外且在圆 $(a-1)^2+b^2=4$ 内（含圆上）.

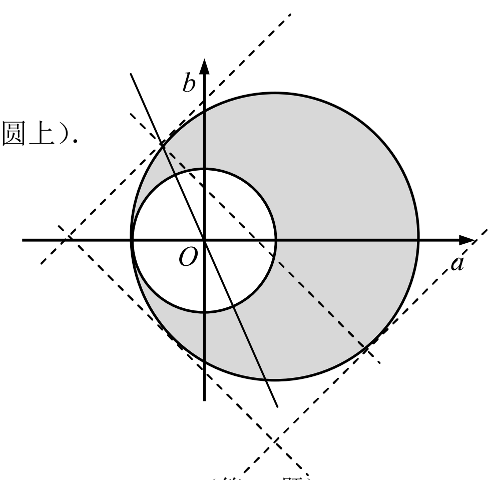
设 $z=|2a+b|+|8-a-2b|$，由于 $8-a-2b>0$，

所以当 $2a+b\geqslant 0$ 时，有 $z=a-b+8$，

结合图形可知，$z\in\left[9-2\sqrt{2},9+2\sqrt{2}\right]$；

当 $2a+b<0$ 时，有 $z=-3a-3b+8$，

结合图形可知，$z\in\left(\frac{31}{5},5+6\sqrt{2}\right]$.

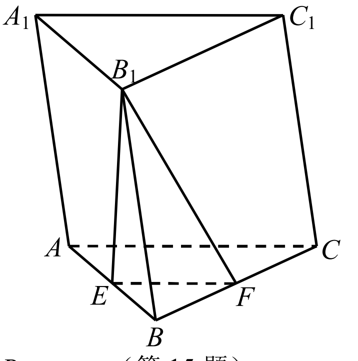


（第 14 题）

综上所述，$|2a+b|+|8-a-2b|$ 的取值范围是 $\left[9-2\sqrt{2},5+6\sqrt{2}\right]$.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．

15．（本小题满分 14 分）



（第 15 题）

【解】（1）在$\triangle ABC$中，E，F分别是棱AB，BC的中点，

所以$EF\parallel AC$．　　　　……2 分

又在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1C_1\parallel AC$，

所以$A_1C_1\parallel EF$．　　　　……4 分

又因为$A_1C_1\not\subset$平面B_1EF，$EF\subset$平面B_1EF，

所以$A_1C_1\parallel$平面B_1EF．　　　　……8 分

（2）因为侧面$ABB_1A_1\perp$底面ABC，侧面$ABB_1A_1\cap$底面$ABC=AB$，

$AB\perp AC$，$AC\subset$平面ABC，

所以$AC\perp$平面ABB_1A_1．　　　　……12 分

又因为$B_1E\subset$平面ABB_1A_1，所以$AC\perp B_1E$．　　　　……14 分

16．（本小题满分 14 分）

【解】（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$b\sin C=c\sin B$．

又由$3a\sin C-4c\sin B=0$，得$3a\sin C=4b\sin C$．　　　　……2 分

又因为$\sin C\neq 0$，所以$3a=4b$．

又由a，b，c成等差数列，得$a+c=2b$，

所以$a=\dfrac{4}{3}b$，$c=\dfrac{2}{3}b$．　　　　……4 分

由余弦定理可得，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+\frac{4}{9}b^2-\frac{16}{9}b^2}{2\cdot b\cdot\frac{2}{3}b}=-\dfrac{1}{4}$．　　　　……7 分

（2）在$\triangle ABC$中，由（1）可得$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

从而$\sin 2A=2\sin A\cos A=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，　　　　……9 分

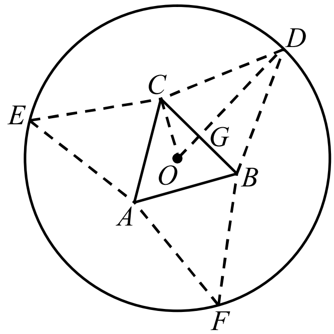
$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=-\dfrac{7}{8}$．　　　　……11 分

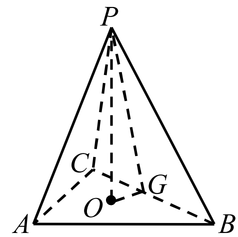
故$\sin(2A+\dfrac{\pi}{3})=\sin 2A\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2A\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{8}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{15}+7\sqrt{3}}{16}$．　　　　……14 分

17.（本小题满分 14 分）

【解】（1）连结 OD，交 BC 于点 G，连结 OC，





在$\triangle GOC$ 中，$GC = x$，$GO = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$，

则 $GD = 5 - \dfrac{x}{\sqrt{3}}$．　　　……2 分

因为三棱锥 $P-ABC$ 是正四面体，

所以$\triangle DBC$ 是正三角形，

所以 $GD = \sqrt{3}GC$，即 $5 - \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x$，解得 $x = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ (cm).　　　……4 分

（2）在$\triangle GOP$ 中，$GO = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$，$GP = 5 - \dfrac{x}{\sqrt{3}}$，

所以高 $PO = \sqrt{GP^2 - GO^2} = \sqrt{(5 - \dfrac{x}{\sqrt{3}})^2 - (\dfrac{x}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{25 - \dfrac{10x}{\sqrt{3}}}$．　　　……6 分

由 $25 - \dfrac{10x}{\sqrt{3}} > 0$ 可得，$x < \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$．　　　……8 分

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot PO = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}x^2 \cdot \sqrt{25 - \dfrac{10x}{\sqrt{3}}}$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3}\sqrt{5x^4 - \frac{2}{\sqrt{3}}x^5}\ .$$　　　……10 分

设函数 $f(x) = 5x^4 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}x^5$，$0 < x < \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，

则 $f'(x) = 20x^3 - \dfrac{10}{\sqrt{3}}x^4 = 10x^3(2 - \dfrac{x}{\sqrt{3}})$．

令 $f'(x) = 0$ 得，$x = 2\sqrt{3}$．列表如下：

x	$(0, 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2})$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

……12 分

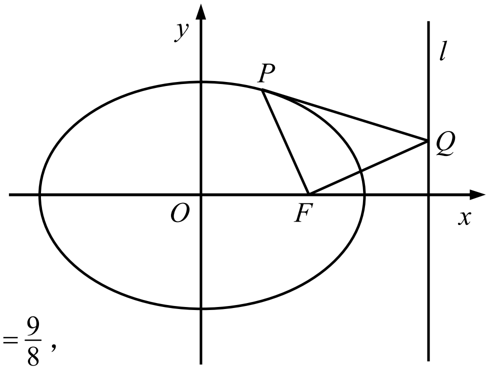
所以 $f(x)$ 在 $x = 2\sqrt{3}$ 时取最大值 $f(2\sqrt{3}) = 144$，

所以 $V_{\max} = 4\sqrt{15}$．

所以 $[f(x)]_{\max} = f(2\sqrt{3}) = 144$，所以 $V_{\max} = 4\sqrt{15}$．

答：三棱锥 $P-ABC$ 体积 V 的最大值为 $4\sqrt{15}$ （cm^3），此时 $x = 2\sqrt{3}$ （cm）．……14 分

18.（本小题满分 16 分）



（第 18 题）

【解】（1）由题意，$\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}=2$，　　……2 分

解得 $a=\sqrt{2}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．　　……3 分

（2）因为 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FQ})\cdot\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PF}^2+\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{PF}=\dfrac{9}{8}$，

由于 $FQ\perp PF$，所以 $\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，所以 $\left|\overrightarrow{PF}\right|=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$．

设 $P(x_0,\ y_0)\,(y_0>0)$，则 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-x_0)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

所以 $x_0=\dfrac{1}{2}$，即点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right)$．　　……5 分

由直线 PF 的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，所以直线 FQ 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{14}}{7}(x-1)$，

令 $x=2$，得 $y_Q=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，即 $Q\left(2,\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right)$，

所以直线 PQ 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{14}}{14}x+\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$．　　……7 分

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=-\dfrac{\sqrt{14}}{14}x+\dfrac{2\sqrt{14}}{7},\end{cases}$ 消 y 得 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{14}(x-4)^2=1$，

化简可得，$4x^2-4x+1=0$，即方程有唯一解 $x=\dfrac{1}{2}$．

所以上述方程组有唯一解，即直线 PQ 与椭圆 C 有且只有一个公共点，

所以直线 PQ 与椭圆 C 相切．　　……9 分

（3）若直线 PF 的斜率不存在，则 $P(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$Q(2,0)$．

此时存在 $R(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，使得四边形 $OQPR$ 是平行四边形．　　……11 分

若直线 PF 的斜率存在，设 $P(x_0,\ y_0)\,(x_0\neq1,\ y_0>0)$，则 $x_0^2+2y_0^2=2$，

由直线 PF 的斜率为 $\dfrac{y_0}{x_0-1}$，知直线 QF 的方程为 $y=-\dfrac{x_0-1}{y_0}(x-1)$．

令 $x=2$，得 $y_Q=-\dfrac{x_0-1}{y_0}$，即 $Q(2,-\dfrac{x_0-1}{y_0})$，

所以直线 PQ 的斜率为 $\dfrac{y_0+\dfrac{x_0-1}{y_0}}{x_0-2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0-1}{y_0(x_0-2)}=-\dfrac{x_0}{2y_0}$．　　……13 分

假设在椭圆上 C 存在点 R，使四边形 $OQPR$ 是平行四边形，

则 $OR // QP$， $OQ // RP$.

所以直线 OR 的方程为 $y=-\frac{x_0}{2y_0}x$，联立椭圆 C： $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

可得 $R(-\sqrt{2}y_0,\frac{\sqrt{2}}{2}x_0)$，

所以直线 RP 的斜率 $k_{RP}=\frac{y_0-\frac{\sqrt{2}}{2}x_0}{x_0+\sqrt{2}y_0}$.

又直线 OQ 的斜率 $k_{OQ}=-\frac{x_0-1}{2y_0}$，

令 $k_{RP}=k_{OQ}$，即 $\frac{y_0-\frac{\sqrt{2}}{2}x_0}{x_0+\sqrt{2}y_0}=-\frac{x_0-1}{2y_0}$，

化简可得， $x_0+\sqrt{2}y_0=2$.

又 $x_0^2+2y_0^2=2$，可以解得 $x_0=1, y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，这与 $x_0\neq 1$ 矛盾！

综上，符合条件的点 R 只有一个，其坐标为 $R(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$. ……16 分

19．（本小题满分 16 分）

【解】（1）①因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{\frac{a_{n+1}+a_n}{2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$，且 $b_1=a_2-a_1=-9\neq 0$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 -9 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ……2 分

②由①知， $b_n=a_{n+1}-a_n=-9\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$， ……4 分

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=-9\times[(-\frac{1}{2})^{n-2}+(-\frac{1}{2})^{n-3}+\cdots+(-\frac{1}{2})^{0}]+6$

$=-9\times\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{2})}+6=6(-\frac{1}{2})^{n-1}$， ……6 分

则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{6(-\frac{1}{2})^{n}}{6(-\frac{1}{2})^{n-1}}=-\frac{1}{2}$，所以 $\{a_n\}$ 是以 6 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

所以 $S_n=6\times\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n}}{1-(-\frac{1}{2})}=4[1-(-\frac{1}{2})^{n}]$. ……8 分

当 $n=1$ 时， S_n 有最大值 6，所以实数 m 的最小值为 6 . ……10 分

（2）设奇数项所成等差数列的公差为d_1，偶数项所成等差数列的公差为d_2.

①当n为奇数时，$a_n=6+\frac{n-1}{2}d_1$，$a_{n+1}=-3+\frac{n-1}{2}d_2$，

则$6+\frac{n-1}{2}d_1>-3+\frac{n-1}{2}d_2$，即$n(d_1-d_2)+18+2(d_2-d_1)>0$，

所以$\begin{cases}d_1-d_2\geqslant 0,\\1\times(d_1-d_2)+9+d_2-d_1>0,\end{cases}$故$d_1-d_2\geqslant 0$. ……12 分

②当n为偶数时，$a_n=-3+(\frac{n}{2}-1)d_2$，$a_{n+1}=6+\frac{n}{2}d_1$，

则$-3+(\frac{n}{2}-1)d_2>6+\frac{n}{2}d_1$，即$n(d_1-d_2)+18+2d_2<0$，

所以$\begin{cases}d_1-d_2\leqslant 0,\\2\times(d_1-d_2)+18+2d_2<0,\end{cases}$，故$\begin{cases}d_1-d_2\leqslant 0,\\d_1<-9.\end{cases}$

综上可得，$d_1=d_2<-9$. ……14 分

又$a_3+a_4=a_1+a_2+d_1+d_2=3+2d_1=-33$，所以$d_1=-18$.

所以当n为奇数时，$a_n=6+\frac{n-1}{2}\times(-18)=15-9n$；

当n为偶数时，$a_n=-3+(\frac{n}{2}-1)\times(-18)=15-9n$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=15-9n$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……16 分

20.（本小题满分 16 分）

【解】（1）由$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，得$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

因为$f'(1)=g(2)$，所以$1=1-\frac{2a+1}{4}+a$，

所以$a=\frac{1}{2}$. ……2 分

（2）因为$h(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{2a+1}{2x}+a$，所以$h(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$h'(x)=\frac{x^2-2\ln x+2a+3}{x^2}$.

因为函数$h(x)$在定义域上单调递增，

所以$h'(x)=\frac{x^2-2\ln x+2a+3}{x^2}\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

即$x^2-2\ln x+2a+3\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立. ……4 分

设$t(x)=x^2-2\ln x+2a+3(x>0)$，则$t'(x)=\frac{2x^2-2}{x}$，

当$0<x<1$时，$t'(x)<0$，则$t(x)$在$\left(0,1\right]$上为减函数，

当 $x>1$ 时，$t'(x)>0$，则 $t(x)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上为增函数， ……6 分

所以 $x^2-2\ln x+2a+3\geqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立 $\Leftrightarrow t(x)_{\min}=t(1)=4+2a\geqslant 0$，

所以 $a\geqslant -2$. ……8 分

（3）因为 $h'(x)=\dfrac{x^2-2\ln x+2a+3}{x^2}$，

所以 $h'(\mathrm{e}^a)=\dfrac{\mathrm{e}^{2a}+3}{2\mathrm{e}^{2a}}>0$，则 $h'(x)<0$ 不可能对 $x>0$ 恒成立，

即 $h(x)$ 在定义域上不可能始终都为减函数. ……10 分

由（2）知函数 $h(x)$ 在定义域上单调递增 $\Leftrightarrow a\geqslant -2$，

所以若函数 $h(x)$ 在定义域上不是单调函数 $\Leftrightarrow a<-2$.

又因为 $h(1)=0$，所以 $x=1$ 是函数 $h(x)=0$ 一个零点.

令 $h(x)=0$，得 $2\ln x+x^2+2ax-2a-1=0$，

设 $m(x)=2\ln x+x^2+2ax-2a-1$，则 $h(x)$ 与 $m(x)$ 有相同的零点，

令 $m'(x)=\dfrac{2(x^2+ax+1)}{x}=0$，得 $x^2+ax+1=0$.

因为 $a<-2$，所以 $\Delta=a^2-4>0$，

所以 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等实数解 x_1，x_2，

因为 $x_1\cdot x_2=1$，$x_1+x_2=-a>2$，所以不妨设 $0<x_1<1<x_2$. ……12 分

当 $x\in(0,\ x_1)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 在 $(0,\ x_1)$ 为增函数，

当 $x\in(x_1,\ x_2)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 在 $(x_1,\ x_2)$ 为减函数，

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 为增函数，

则 $m(x_1)>m(1)>0$，$m(x_2)<m(1)<0$. ……14 分

又因为 $a<-2$ 时，$0<\mathrm{e}^a<1$，$-2a>4$，

$m(\mathrm{e}^a)=\mathrm{e}^{2a}-1+2a\mathrm{e}^{2a}<0$，$m(-2a)=2\ln(-2a)+4a^2-6a-1>0$，

又因为 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 图象不间断，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一一个零点，

又因为 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 图象不间断，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有唯一一个零点，

又因为 $x=1$ 是函数 $h(x)=0$ 一个零点.

综上函数 $h(x)$ 必有三个不同零点. ……16 分

江苏省仪征中学2 0 2 0届高三（下）五月扬州统测考前热身练习1（附加题）

21. 【解】设点　　　　，则$\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，即$\begin{cases}x=-2+a,\\ y=2b+4.\end{cases}$ ……2 分

因为点 P' 在直线 $l:2x-y-2=0$ 上，

所以 $2(-2+a)-(2b+4)-2=0$，化简得 $a-b-5=0$． ……4 分

又 $\boldsymbol{M}$ 不存在逆矩阵，$|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}-1 & a\\ b & 4\end{vmatrix}=0$，所以 $ab=-4$ ② ……8 分

联立①②得$\begin{cases}a=b+5,\\ ab=-4,\end{cases}$解之得$\begin{cases}a=4\\ b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\ b=-4\end{cases}$． ……10 分

22. 在极坐标系中，圆 C 的方程为 $\rho=2m\cos\theta$（$m\neq 0$），以极点为坐标原点，极轴为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系．设直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\end{cases}$（$t$ 为参数），若直线 l 与圆 C 恒有公共点，求 m 的取值范围．

【解】圆 C 的方程 $\rho=2m\cos\theta$ 对应的普通方程为 $(x-m)^2+y^2=m^2$， ……3 分

直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$． ……6 分

因为直线 l 与圆 C 恒有公共点，

则圆心 $(m,0)$ 到直线 l 的距离 $d\leqslant|m|$，即 $\dfrac{|\sqrt{3}m+\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}}\leqslant|m|$． ……8 分

解得 m 的取值范围是 $(-\infty,3-2\sqrt{3}]\cup[3+2\sqrt{3},+\infty)$． ……10 分

23.（本小题满分 10 分）

【解】正四面体底面上的数字可能是 1，2，3，4，则 $(x_i-3)^2(i=1,2)$ 的所有取值为 0，1，4．

（1）当 $x_1=x_2=1$ 时，X 最大，所以 $P(X=8)=\dfrac{1}{16}$． ……3 分

（2）X 的可能取值为 0，1，2，4，5，8．

$P(X=0)=\dfrac{1}{16}$，$P(X=1)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，$P(X=2)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，

$P(X=4)=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$，$P(X=5)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，$P(X=8)=\dfrac{1}{16}$． ……8 分

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	4	5	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{16}+1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{4}+4\times\dfrac{1}{8}+5\times\dfrac{1}{4}+8\times\dfrac{1}{16}=3$． ……10 分

24．（本小题满分 10 分）

【解】（1）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

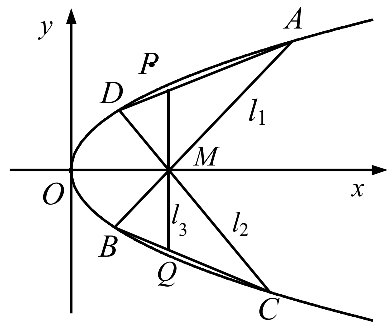
将直线 $l_1: y=x-\frac{1}{2}p$ 与抛物线 $y^2=2px$ 联立，

得 $x^2-3px+\frac{1}{4}p^2=0$，所以 $x_1+x_2=3p$．

由 $t=\frac{1}{2}p$，得 M 即为焦点，

所以 $AB=(x_1+\frac{1}{2}p)+(x_2+\frac{1}{2}p)=4p=4$，即 $p=1$，

所以抛物线的方程为 $y^2=2x$．



（第 23 题）

……4 分

（2）由题意可知，l_1，l_2 斜率存在且不为 0.

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$，$D(x_4,\ y_4)$，

设直线 $l_1: x=my+t$，$l_2: x=ny+t$，

与抛物线 $y^2=2x$ 联立得，$y^2-2my-2t=0$，$y^2-2ny-2t=0$，

所以 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-2t, y_3+y_4=2n, y_3y_4=-2t$．

设 $P(t,\ \lambda)$，$Q(t,\ \mu)$，由 A，P，D 三点共线，又 ${y_1}^2=2x_1$，${y_4}^2=2x_4$，

得 $\frac{\lambda-y_1}{t-x_1}=\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4}\Rightarrow\lambda=\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4}\cdot\left(t-x_1\right)+y_1$

$$=\frac{2(y_1-y_4)}{{y_1}^2-{y_4}^2}\cdot\left(t-x_1\right)+y_1$$

$$=\frac{2t-2x_1+{y_1}^2+y_1y_4}{y_1+y_4}$$

$$=\frac{y_1y_4+2t}{y_1+y_4}.$$

同理，$\mu=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot\left(t-x_3\right)+y_3$

$$=\frac{2}{y_3+y_2}\cdot\left(t-x_3\right)+y_3$$

$$=\frac{2t-2x_3+y_3{}^2+y_2y_3}{y_3+y_2}$$

$$=\frac{y_2y_3+2t}{y_2+y_3}.$$

所以$\lambda+\mu=\frac{y_1y_4+2t}{y_1+y_4}+\frac{y_2y_3+2t}{y_2+y_3}$

$$=\frac{(y_1y_2y_4+y_1y_3y_4+y_1y_2y_3+y_2y_3y_4)+2t(y_1+y_2+y_3+y_4)}{(y_1+y_4)(y_2+y_3)}$$

$$=\frac{y_1y_2(y_3+y_4)+y_3y_4(y_1+y_2)+2t(y_1+y_2+y_3+y_4)}{(y_1+y_4)(y_2+y_3)}$$

$$=\frac{-2t\cdot 2n-2t\cdot 2m+2t(2m+2n)}{(y_1+y_4)(y_2+y_3)}=0.$$

即 P，Q 关于 x 轴对称.

所以，$\frac{MP}{MQ}=1$ 为定值. ……10 分