用综合法求角与距离

一、课程标准

1、 理解空间角的概念，理解空间内的平行与垂直关系.

2、掌握用传统方法求空间内异面直线所成的角、直线与平面所成的角及二面角的常见方法.

二、基础知识回顾

知识梳理

1. 异面直线所成的角

①定义：设 a，b 是两条异面直线，经过空间任一点 O 作直线 a′∥a，b′∥b，把 a′与 b′所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角).

②范围：$\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. 线面角

平面的一条斜线和它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角，当一条直线垂直于平面时，规定它们所成的角是直角.

3. 二面角

以二面角的公共直线上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于公共直线的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.

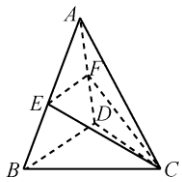
4. 点到平面的距离

从平面外一点引平面的垂线，这个点和垂足间的距离，叫做这个点到这个平面的距离

三、自主热身、归纳总结

1、已知正四面体 ABCD 中，E 是 AB 的中点，则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为(　　)

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

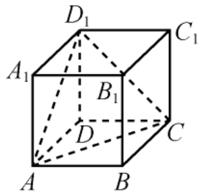


【答案】 B

【解析】 如图，取 AD 的中点 F，连结 EF，CF.因为 E 为 AB 的中点，所以 EF∥DB，则∠CEF 为异面直线 BD 与 CE 所成的角．在正四面体 ABCD 中，因为 E，F 分别为 AB，AD 的中点，所以 CE＝CF.设正四面体的棱长为 2a，则 EF＝a，CE＝CF＝ $\sqrt{(2a)^2-a^2}$＝ $\sqrt{3}$a.在△CEF 中，由余弦定理得 cos∠CEF＝

$\dfrac{CE^2+EF^2-CF^2}{2CE·EF}=\dfrac{a^2}{2\times\sqrt{3}a^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

2、在正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，BB_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为(　　)

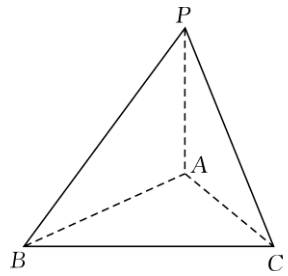


A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\dfrac{2}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】 B

【解析】因为 $BB_1 \parallel DD_1$，所以 BB_1 与平面 ACD_1 所成角即为 DD_1 与平面 ACD_1 所成角. 设点 D 到平面 ACD_1 的距离为 h，正方体的边长为 a，则 $V_{D_1ADC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times a\times a=\frac{1}{6}a^3$，$V_{DAD_1C}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}a\right)^2h=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h$，所以 $\frac{1}{6}a^3=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h$，得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. 设 BB_1 与平面 ACD_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{DD_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

3、 [2019 杭州模拟]在三棱锥 P－ABC 中，PA⊥底面 ABC，∠BAC＝120°，AB＝AC＝1，PA＝$\sqrt{2}$，则直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为(　　　)



A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　*B.* $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　*C.* $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　*D.* $\dfrac{1}{3}$

【答案】D

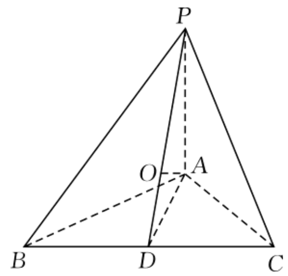
【解析】 ∵PA⊥底面 ABC，∴PA⊥AB，PA⊥AC，即∠PAB＝∠PAC＝90°，

又∵AB＝AC＝1，PA＝PA＝$\sqrt{2}$，

∴△PAB≌△PAC，

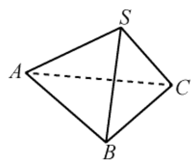
∴PB＝PC. 取 BC 的中点 D，连接 AD，PD，

∴PD⊥BC，AD⊥BC，又∵



PD∩AD＝D，∴BC⊥平面 PAD，∵BC⊂平面 PBC，∴平面 PAD⊥平面 PBC，过 A 作 AO⊥PD 于 O，易得 AO⊥平面 PBC，∴∠APD 就是直线 PA 与平面 PBC 所成的角. 在 *Rt*△PAD 中，$AD=\frac{1}{2}$，$PA=\sqrt{2}$，则 $PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\frac{3}{2}$，则 $\sin\angle APD=\frac{AD}{PD}=\frac{1}{3}$. 故选 *D.*

4、如图，已知在三棱锥 SABC 中，SA＝SB＝CA＝CB＝$\sqrt{3}$，AB＝2，SC＝$\sqrt{2}$，则二面角 S-AB-C 的平面角的大小为(　　)

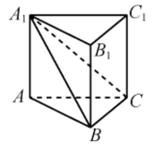


A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 90°

【答案】 C

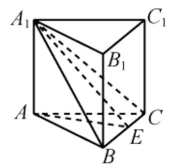
【解析】 取 AB 的中点 O，连结 SO，CO.由 SA＝SB＝CA＝CB 可得 AB⊥SO，AB⊥CO.又 SO∩CO＝O，所以 AB⊥平面 SOC，所以二面角 SABC 的平面角是∠SOC.在△SOA 中，SO＝$\sqrt{SA^2-AO^2}$＝$\sqrt{2}$，同理 CO＝$\sqrt{2}$.在△SOC 中，SO＝CO＝SC＝$\sqrt{2}$，所以∠SOC＝60°，即二面角 SABC 的平面角的大小为 60°.

5、如图，在正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中，各棱长都相等，则二面角 A_1- BC -A 的平面角的正切值为________.

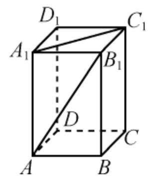


【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】 设棱长为 a，BC 的中点为 E，连结 A_1E，AE，由正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中，各棱长都相等，可得 $A_1E\perp BC$，$AE\perp BC$，故二面角 A_1BCA 的平面角为 $\angle A_1EA$.在 Rt△ABE 中，$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $\tan\angle A_1EA=\frac{AA_1}{AE}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即二面角 A_1BCA 的平面角的正切值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



6、若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1，AB_1 与底面 ABCD 所成角的大小为 60°，则 A_1C_1 到底面 ABCD 的距离为________.



【答案】$\sqrt{3}$

【解析】 由题意得 $\angle B_1AB=60°$，所以 $B_1B=AB\tan 60°=\sqrt{3}$. 又 A_1C_1∥平面 ABCD，所以 A_1C_1 到底面 ABCD 的距离为 $B_1B=\sqrt{3}$.

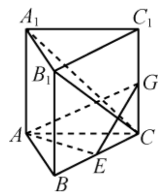
四、例题选讲

例 1 如图，在三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$平面 ABC，$\angle BAC=90°$，$AC=AB=AA_1$，E 是 BC 的中点.

(1) 求证：$AE\perp B_1C$；

(2) 求异面直线 AE 与 A_1C 所成的角的大小；

(3) 若 G 为 C_1C 的中点，求二面角 C-AG-E 的正切值.



【解析】 (1) 因为 $BB_1\perp$平面 ABC，$AE\subset$平面 ABC，所以 $AE\perp BB_1$.

由 AB＝AC，E 为 BC 的中点，得 $AE\perp BC$.

因为 $BC\cap BB_1=B$，BC，$BB_1\subset$平面 BB_1C_1C，

所以 $AE\perp$平面 BB_1C_1C.

又因为 $B_1C\subset$平面 BB_1C_1C，

所以 $AE\perp B_1C$.

(2) 取 B_1C_1 的中点 E_1，连结 A_1E_1，E_1C，则 AE∥A_1E_1，

所以 $\angle E_1A_1C$ 是异面直线 AE 与 A_1C 所成的角.

设 $AC=AB=AA_1=2$，

则由 $\angle BAC=90°$，可得 $A_1E_1=AE=\sqrt{2}$，$A_1C=2\sqrt{2}$，$E_1C_1=EC=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，

所以 $E_1C=\sqrt{E_1C_1^2+C_1C^2}=\sqrt{6}$.

在$\triangle E_1A_1C$ 中，$\cos\angle E_1A_1C=\dfrac{2+8-6}{2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以异面直线 AE 与 A_1C 所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$.

(3) 设 P 是 AC 的中点，过点 P 作 $PQ\perp AG$ 于点 Q，连结 EP，EQ，则 $EP\perp AC$.

又因为平面 $ABC\perp$平面 ACC_1A_1，平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$，$EP\subset$平面 ABC，

所以 $EP\perp$平面 ACC_1A_1.

因为 $AG\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $AG\perp EP$.

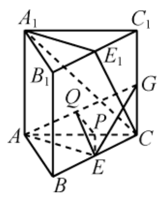
又 $PQ\perp AG$，EP，$PQ\subset$平面 EPQ，$EP\cap PQ=P$，

所以 $AG\perp$平面 EPQ.

又因为 $EQ\subset$平面 EPQ，

所以 $EQ\perp AG$，

所以$\angle PQE$ 是二面角 CAGE 的平面角.



由(2)假设知 $EP=1$，$AP=1$，

$Rt\triangle ACG\backsim Rt\triangle AQP$，$PQ=\dfrac{CG\cdot AP}{AG}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

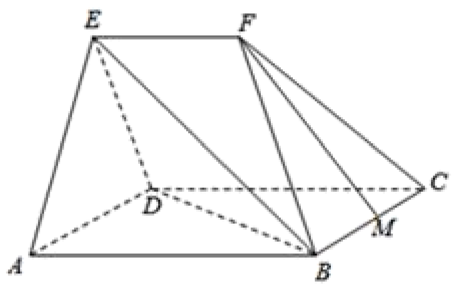
故 $\tan\angle PQE=\dfrac{PE}{PQ}=\sqrt{5}$，

所以二面角 CAGE 的正切值是$\sqrt{5}$.

例 2 如图所示的五面体 ABCDEF 中，四边形 ABCD 为菱形，且$\angle DAB=60°$，$EA=ED=AB=2EF=2$，$EF\parallel AB$，M 为 BC 的中点.

(1) 求证：$FM\parallel$平面 BDE；

(2) 若平面 $ADE\perp$平面 ABCD，求：（i）直线 EB 与平面 ABCD 所成角的正弦值；(ii)点 F 到平面 BDE 的距离.



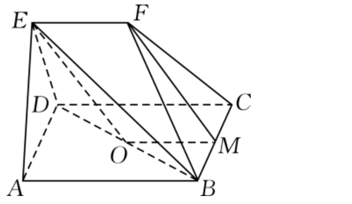
【解析】 (1)证明：取 BD 的中点 O，连接 OM，OE，.

∵O，M 分别为 BD，BC 的中点，∴$OM\parallel CD$，且 $OM=\dfrac{1}{2}CD$.

∵四边形 ABCD 为菱形，∴$CD\parallel AB$，又 $EF\parallel AB$，

∴$CD\parallel EF$，

又 $AB=CD=2EF$，∴$EF=\dfrac{1}{2}CD$，∴$OM\parallel EF$，且 $OM=EF$，



∴四边形 OMFE 为平行四边形，∴MF∥OE.

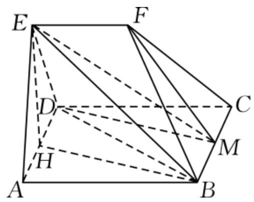
又 OE⊂平面 BDE，MF⊄平面 BDE，∴MF∥平面 BDE.

(2)由(1)得 FM∥平面 BDE，∴点 F 到平面 BDE 的距离等于点 M 到平面 BDE 的距离.

取 AD 的中点 H，连接 EH，BH，

∵EA＝ED，四边形 ABCD 为菱形，且∠DAB＝60°，∴EH⊥AD，BH⊥AD.

∵平面 ADE⊥平面 ABCD，平面 ADE∩平面 ABCD＝AD，EH⊂平面 ADE，



∴EH⊥平面 ABCD，∴EH⊥BH，易得 $EH=BH=\sqrt{3}$，∴$BE=\sqrt{6}$，

∴$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. 设点 F 到平面 BDE 的距离为 h，

连接 DM，则 $S_{\triangle BDM}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=\frac{\sqrt{3}}{2}$，连接 EM，由 $V_{三棱锥E-BDM}=V_{三棱锥M-BDE}$，

得$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times h\times\frac{\sqrt{15}}{2}$，解得 $h=\frac{\sqrt{15}}{5}$，即点 F 到平面 BDE 的距离为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

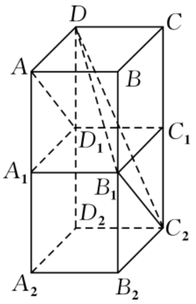
五、优化提升与真题演练

1、(2018 全国Ⅱ高考）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB＝BC＝1，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为(　　)

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】 如图，将长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补成长方体 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$，使 $AA_1=A_1A_2$，易知 AD_1 ∥B_1C_2，∴$\angle DB_1C_2$ 或其补角为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成的角.



易知 $B_1C_2=AD_1=2$，

$DB_1=\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$，

$DC_2=\sqrt{DC^2+CC_2^2}=\sqrt{1^2+2\sqrt{3}^2}=\sqrt{13}$.

在$\triangle DB_1C_2$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle DB_1C_2=\frac{DB_1^2+B_1C_2^2-DC_2^2}{2DB_1\cdot B_1C_2}=\frac{5+4-13}{2\times\sqrt{5}\times2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

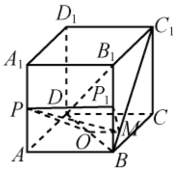
∴异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

2、已知正方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 6，P 是 AA_1 的中点，Q 是$\triangle BDC_1$ 内的动点，若 $PQ\perp BC_1$，则点 Q 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离的取值范围是(　　)

A. [3，5]　　B. $\left[\frac{9}{2}，6\right]$　　C. [4，5]　　D. $[2\sqrt{3}，6]$

【答案】 B

【解析】 如图，在正方体中取 BB_1、BD 中点 P_1、O，及 BC_1 的四等分点 M，因为 $PP_1\perp BC_1$，$P_1M\perp BC_1$，$P_1M\cap PP_1=P_1$，P_1M，$PP_1\subset$平面 PP_1M，所以 $BC_1\perp$平面 PP_1M，则 $BC_1\perp PM$.又 $OM\perp BC_1$，$OM\cap PM=M$，故 $BC_1\perp$平面 POM，所以当点 Q 在线段 OM 上时，$PQ\perp BC_1$，则点 Q 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离最大为 6，最小为 $6\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$，所以点 Q 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离的取值范围为$\left[\frac{9}{2}，6\right]$.故选 B.

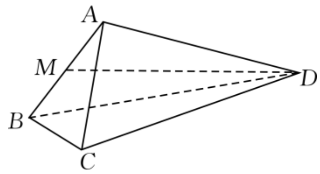


3、（2018 天津高考）如图，在四面体 ABCD 中，△ABC 是等边三角形，平面 ABC⊥平面 ABD，点 M 为棱 AB 的中点，AB＝2，AD＝$2\sqrt{3}$，∠BAD＝90°.

(1)求证：AD⊥BC；

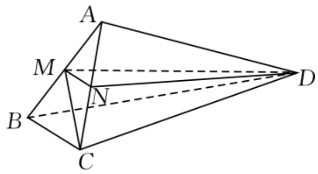
(2)求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值；

(3)求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值.



【解】 (1)证明：由平面 ABC⊥平面 ABD，平面 ABC∩平面 ABD＝AB，AD⊥AB，可得 AD⊥平面 ABC，故 AD⊥BC.

(2)如图，取棱 AC 的中点 N，连接 MN，ND.



又∵M 为棱 AB 的中点，∴MN∥BC.

∴∠DMN(或其补角)为异面直线 BC 与 MD 所成的角.

在 *Rt*△DAM 中，AM＝1，故 DM＝$\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{13}$.

∵AD⊥平面 ABC，∴AD⊥AC.

在 *Rt*△DAN 中，AN＝1，故 DN＝$\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{13}$.

在等腰三角形 DMN 中，MN＝1，可得 $cos\angle DMN=\frac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\frac{\sqrt{13}}{26}$.

∴异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{13}}{26}$.

(3)如图，连接 CM. ∵△ABC 为等边三角形，M 为边 AB 的中点，∴CM⊥AB，CM＝$\sqrt{3}$.

又∵平面 ABC⊥平面 ABD，而 CM⊂平面 ABC，故 CM⊥平面 ABD，

∴∠CDM 为直线 CD 与平面 ABD 所成的角.

在 *Rt*△CAD 中，CD＝$\sqrt{AC^2+AD^2}=4$.

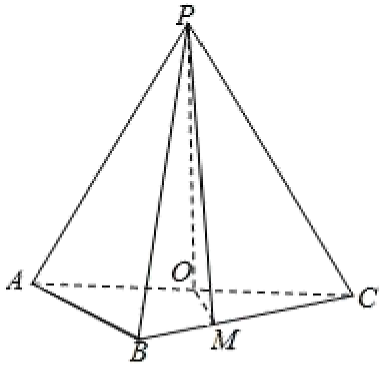
在 *Rt*△CMD 中，$sin\angle CDM=\frac{CM}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

∴直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

4、（2018 全国Ⅱ高考）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.

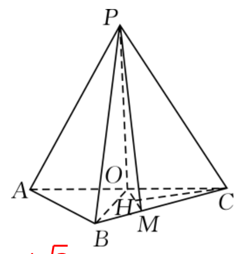
(1)证明：$PO\perp$平面 ABC；

(2)若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$，求点 C 到平面 POM 的距离.



【解】 (1)证明：∵$PA=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点，∴$PO\perp AC$，且 $PO=2\sqrt{3}$. 连接 OB，

∵$AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，∴△ABC 为等腰直角三角形，且 $OB\perp AC$，$OB=\frac{1}{2}AC=2$.



∴$PO^2+OB^2=PB^2$，∴$PO\perp OB$. 又∵$AC\cap OB=O$，∴$PO\perp$平面 ABC.

(2)如图，作 $CH\perp OM$，垂足为 H，

又由(1)可得 $PO\perp CH$，且 $PO\cap OM=O$，∴$CH\perp$平面 POM.

故 CH 的长为点 C 到平面 POM 的距离. 由题设可知 $OC=\frac{1}{2}AC=2$，$MC=\frac{2}{3}BC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$\angle ACB=45°$，

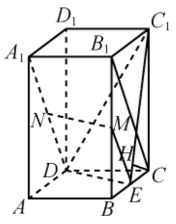
∴$OM=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$CH=\frac{OC\ MC\ \sin\angle ACB}{OM}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

∴点 C 到平面 POM 的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

5、直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E、M、N 分别是 BC、BB_1、A_1D 的中点.

(1) 证明：MN∥平面 C_1DE；

(2) 求点 C 到平面 C_1DE 的距离.

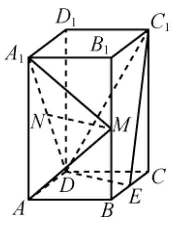


【解析】 (1) 连结 B_1C，ME.

因为 M，E 分别为 B_1B，BC 的中点，

所以 $ME∥B_1C$，且 $ME=\frac{1}{2}B_1C$.

又因为 N 为 A_1D 的中点，所以 $ND=\frac{1}{2}A_1D$，



所以 $ME=ND$，$ME∥ND$，

所以四边形 MNDE 为平行四边形，

所以 $MN∥DE$.

又 $MN\not\subset$平面 C_1DE，$DE\subset$平面 C_1DE，

所以 MN∥平面 C_1DE.

(2) 过点 C 做 C_1E 的垂线，垂足为 H.

由已知可得 $DE\perp BC$，$DE\perp CC_1$，

易证 $DE\perp$平面 CC_1E，

故 $DE\perp CH$，从而易证 $CH\perp$平面 C_1DE，故 CH 的长即为点 C 到平面 C_1DE 的距离.

由已知可得 $CE=1$，$CC_1=4$，

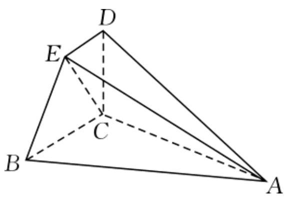
所以 $C_1E=\sqrt{17}$，

故 $CH=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

6、如图，在四棱锥 A－BCDE 中，平面 BCDE⊥平面 ABC，BE⊥EC，BC＝2，AB＝4，∠ABC＝60°.

(1)求证：BE⊥平面 ACE;

(2)若直线 CE 与平面 ABC 所成的角为 45°，求二面角 E－AB－C 的余弦值.



【证明】 (1)证明：在△ACB 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $AC=2\sqrt{3}$，∴$AC^2+BC^2=AB^2$，∴AC⊥BC.

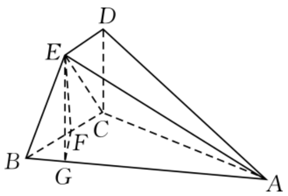
又∵平面 BCDE⊥平面 ABC，平面 BCDE∩平面 ABC＝BC，AC⊂平面 ABC，

∴AC⊥平面 BCDE.

又 BE⊂平面 BCDE，∴AC⊥BE.

又 BE⊥EC，AC，CE⊂平面 ACE，且 AC∩CE＝C，

∴BE⊥平面 ACE.



(2)∵直线 CE 与平面 ABC 所成的角为 45°，平面 BCDE⊥平面 ABC，

平面 BCDE∩平面 ABC＝BC，∴∠BCE＝45°，∴△EBC 为等腰直角三角形.

取 BC 的中点 F，连接 EF，过点 F 作 FG⊥AB 于点 G，连接 EG，

则∠EGF 为二面角 E－AB－C 的平面角. 易得 EF＝BF＝1，$FG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

在 *Rt*△EFG 中，由勾股定理，得 EG＝

$\sqrt{EF^2+FG^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，∴$\cos\angle EGF==\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

∴二面角 E－AB－C 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.