

正确对待“低级”错误 用心授好“预备知识”

刘在云 (江苏省仪征市教学研究室 211400)

1 引言

2020 级高一学生是我省使用新教材的首届学生.而全新的苏教版数学教材,是根据《普通高中数学课程标准(2017 版)》(下称《新课标》)的指导意见,在必修第一册的前四章编排的是主题 1——预备知识.根据编写的内容可以看出,教材已力求以义务教育阶段数学课程内容为载体,相同学习内容在老版教材基础上作了较大改变(可参看文[1]).结合集合、常用逻辑用语、相等关系与不等关系、从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式等内容的学习,为高中数学课程做好学习心理、学习方式和知识技能等方面的准备,帮助学生完成初高中数学学习的过渡.

《新课标》为什么要求编排预备知识?笔者认为正是考虑到作为高中学习的内容,一开始就比初中时更加抽象、更加综合、更具有逻辑性,期望通过预备知识的学习,让学生有个适应过程.作为执教高一的数学教师,我们应加强对《新课标》的学习,领会《新课标》的精神,力求遵从学生认知规律,合理安排教学内容,揭示数学内容的发生、发展过程,体现数学内容的逻辑体系,同时也应在教学方式上勇于突破、积极创新,多多指导学生自主学习,切实让学生掌握高中数学必备知识,提高其关键能力,最终发展学生的数学核心素养,使其更好地适应三年后的基于高考评价体系的数学科的高考.如果我们不能更新教学理念,继续以满堂灌的形式讲解新知,并辅以大容量的练习,不但很难培养学生的核心素养和创新精神,可能连一些必备知识的掌握都困难重重,这首先就表现为一些“低级”错误屡屡发生,久而久之,会让部分学生畏惧数学,最终失去学习数学的兴趣和能力.

2 案例分析

案例 1 听课中发现的三个错误.

教学内容是用基本不等式求函数最值,源于苏教版普通高中教科书数学必修第一册第三章第一节《基本不等式》(2020 年 7 月的第一版新教材),教学对象是我市生源最好的老牌四星高中的普通班.

上课伊始,教师通过提问的形式对基本不等式的内容作了回顾,让学生再认了基本不等式内容 $a \geq 0, b \geq 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$,并强调了“一正、二定、三相等”,还作了一些延伸,讲解了基本不等式的变形: $a \geq 0, b \geq 0, a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 和 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

接下来,师生共同解决了例 1:求函数 $y = x + \frac{16}{x} (x > 0)$ 的最小值.教师对照基本不等式的使用条件,求解如下:因为 $x > 0$,所以 $\frac{16}{x} > 0$,故 $y = x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 8$.最后特别强调,当且仅当 $x = \frac{16}{x}$ 即 $x = 4$ 时取“=”.解好之后出示了变式:求函数 $y = x + \frac{16}{x} (x < 0)$ 的最大值.教师做了一些引导,特别提出了不满足“一正”,指导学生“提取负号”得 $y = -\left[(-x) + \left(-\frac{16}{x}\right)\right]$,然后交给学生处理,几乎是将学生搀扶到问题解决的门口,请学生板演.在学生板演期间,笔者巡看了部分同学的做法,看到了以下几类算是“低级”的错误:

$$(1) -x + \frac{16}{-x} \geq \sqrt{(-x) \cdot \frac{16}{-x}} = 4;$$

$$(2) \text{ 因为 } x < 0, \text{ 所以 } -x + \frac{16}{-x} > 0, \text{ 故 } x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 8;$$

(3) 在教师特别强调之下,仍未写上等号取得条件.

这样的错误虽然是个别现象(若换了其他生源弱些的学校也许并非个别现象),但到底是什么原因导致的呢?经过听课现场的感受与课下的思考,笔者觉得造成错误(1)是因为在讲解基本不等式 $a \geq 0, b \geq 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 变形成 $a \geq 0$,

$b \geq 0, a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 之后,没能留给学生尤其是“慢热型”的学生足够的理解、消化的时间去体会两者的联系与区别.

错误(2)明显是学生在生搬硬套,是逻辑不够清晰所导致,为什么会有学生造成这样的逻辑混乱呢?我认为是学生未能真正理解基本不等式,还未能体会基本不等式的本质,它实质就是一个客观存在的原理:两个变化的正数,它们的积与和之间存在不等关系.若在例1讲评时,让学生充分感受到 $x, \frac{16}{x}$ 是两个正的变量,因其积一定,故

可以根据基本不等式原理直接得到 $x + \frac{16}{x}$ 的最小值.

错误(3)常被有些教师认为是学生态度问题,笔者认为不是如此,责任还是在教师,因为教师未能跟学生讲清为什么一定要写等号取得条件,这就要从“函数的最值”定义谈起,当然此定义被苏教版教材编写于第五章(在本内容之后),这就需要教师灵活使用教材.比如通过举例 $x^2 \geq -1$ 恒成立,但不能说 x^2 的最小值是 -1 ,先让学生感受到函数的最值一定要能取到,也就能让学生认同用基本不等式求最值时一定要加上等号取得条件,那是学数学必须有的严谨.

案例2 单元检测中出现的错误.

题目:已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x \mid mx - 1 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 m 的值.

说实话,作为初学集合的高一学生,首次面对此题,忽略集合 B 为空集而导致求解不全可以理解,但有位教师向笔者诉苦,说讲了不少次,仍有部分学生不考虑集合 B 为空集的情况,开始质疑学生的学习能力.于是笔者就向这位教师询问是如何讲解的,教师说根据题意,先讨论集合 B 为空集,得出 $m=0$,再讨论 $m \neq 0$ 时的情况,然后叹惜学生就是不长记性,老是忘了 B 为空集的情况.笔者就反问这位教师:有人提醒你在一段你不经常走的路段上有个小坑,你偶尔经过时会想起那边有坑吗?该教师说:可能不会想到.因此笔者就说,那我们就要理解学生了,他们每天忙于多门科目的学习,每天都要学习许多新的内容,怎么可能一定记得这道题中的小坑呢?该教师马上表示赞同,笔者问到:那怎样可以避免受到坑的影响呢?我们只有养成认真走路,看路走路的素养.

这道题的讲评正好可以培养学生这一素质.

通过对本题的讲评,我们应让学生领会:数学解题必经之路是化简.记得曾有专家说过:数学解题的过程就是连续化简的过程,而化简时必须考虑等价变形.如此题首先要对集合 A, B 进行化简,其中容易化得集合 $A = \{-1, 3\}$, 而集合 B 是关于 x 的含参方程的解集,如何解?等价转化为 $mx = 1$, 然后两边同除以 m , 而在此处需要特别强调 m 是否为零,当 $m=0$ 时,关于 x 的方程无解,即集合 B 为空集,符合题意.通过交流,这位教师赞同了这一处理方法,也觉得一开始就讨论 B 为空集有点突兀,没能抓准逻辑起点.

案例3 教师交流时诉说的错误.

在学校视导高一教学时,有教师反映现在的学生难教,举了一例:已知 A, B 是平面上两点,动点 P 满足 $PA + PB = AB$, 则点 P 的集合是什么?抱怨有学生奇怪地作出如下解答:因为 $PA + PB = AB$, 所以 $P(A+B) = AB$, 故 $P = \frac{AB}{A+B}$. 笔者与该教师交流时谈了自己的看法——《新课标》已明确指出:在集合、常用逻辑用语的教学中,教师应创设合适的教学情境,以义务教育阶段学过的数学内容为载体,引导学生用集合语言和常用逻辑用语梳理、表达学习过的相应数学内容.^[2] 此时出示这个问题时机不当,学生还没有轨迹的认识,一定要处理教辅资料上的这道题,则可以以培养学生直观想象素养为目标,作图后让学生探索点 P 的位置,通过探索让学生最终发现 P 在 A, B 所在直线外不可能(与三角形两边之和大于第三边矛盾),在线段 AB 的延长线上或是反向延长线上显然不合,点 P 只能在线段 AB 上.最后,笔者建议对于这位学生不但不要批评,还应适当表扬,要欣赏他的类比能力,当然要指出类比的合理性.

3 预备知识数学教学建议

(1) 换位思考,降低难度

《新课标》开篇就介绍了课程性质与基本理念,而在基本理念中首先提到:高中数学课程以学生发展为本,落实立德树人的根本任务,培育科学精神与创新意识,提升数学学科核心素养.接着强调高中数学课程要面向全体学生,实现“人人都能获得良好的数学教育,不同的人 在数学上得到不同发展”.为了践行这一理念,班级课堂教学目标的设定要研究学情(据了解,各地区不同学校高一生源情况有差异,同一学校不同班级之间也有差

别),备课时要全面关注学生的认知基础和现有能力,教学设计时要遵循学生的最近发展区原则.建议教师要能从学生角度体会一些数学知识,不能从自己的角度来看待一些教学内容,总是觉得这个内容这么简单,那个内容应该懂得,要多研究(当然也可向部分学生了解甚至可以全面调查)学生了解的程度.比如一元二次方程中的韦达定理,学生知晓情况的差别就很大.另外,为了最大程度地实现人人都能获得良好的数学教育,高一的教学安排(包括必要的测试)一定要降低难度,确保人人在数学的学习中有获得感与成就感,在学生犯一些“低级”错误时,教师要有包容心,要根据学生所犯错误分析其合理性,在保护其理性精神的基础上为其纠偏、纠错.

(2) 找准起点,关注节点(理解数学)

《新课标》指出:学生数学学科核心素养的水平达成不是一蹴而就的,具有阶段性、连续性、整合性等特点,建议要结合特定的教学任务,思考相应数学学科核心素养在教学中的孕育点、生长点.为此,在数学教学设计时,教师要找准逻辑起点,关注知识生长的节点.例如基本不等式的应用,它的起点就是基本不等式这一客观存在的事实,而这一事实是前人发现总结出的智慧结晶,理解掌握了这一起点,学生就不难解决问题1:求 $x + \frac{16}{x} (x > 0)$ 最小值;多数教师教学设计时会有变式:求 $x + \frac{16}{x+2} (x > -2)$ 的最小值,并强调配凑积为定值后,再根据基本不等式进行求解.但遗憾的是,很少有教师引导学生发现:变式实质是问题1“生长”出来的,生长的节点就是将问题1中的 x 换元成 $x+2$ (当然也可以换成其他的表达式).这实际上也是数学命题常用的方式,更少有教师继续对此题进一步培育生长,比如求 $\frac{x^2+2x+16}{x+2} (x > -2)$ 最小值.这实质上是将变

式题的结构作了变化,直到最终求形如 $\frac{a^2+dx+e}{ax+b}$ 的最小值,这种结构的最值求解,多数教师也会安排在习题教学中,但是因设置得比较突然,未能体现知识的生长,问题的演变,而常常变成了题型教学.

(3) 重视过程,增加探究

《新课标》在基本理念中提到,高中数学以发展学生数学学科素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质,提倡独立思考、自主学习、合作交流等多种学习方式,激发学生学习数学的兴趣,养成良好的学习习惯,促进学生实践能力与创新意识的发展.章建跃曾经谈到数学教学重结果轻过程的危害,他指出数学是思维的科学,数学思想方法孕育于知识的发生发展过程中,“思想”是概念的灵魂,是“数学素养”的源泉,是从技能到能力的桥梁;“过程”是“思想”的载体,是领悟概念本质的平台,是思维训练的通道,是培养数学能力的土壤.但事实上仍有一些教师的观念未能得到更新,数学课堂教学仍表现为轻过程、重结果、忙刷题.比如曾听过一节对数运算公式的新授课,教师在直接抛出公式,让学生短暂记忆后,就让学生利用公式进行解题,且坚持认为如此安排效率较高,认为这种公式教学目标就是知晓能用,而没能体会到如此安排严重丧失了本学科所应具备的培养学生思维能力、实践能力和创新意识的功能.事实上,对于这样的课堂,学生是不喜欢的,对于这样的教师,学生也是不欣赏的.

参考文献

- [1] 刘在云.苏教版新旧教材《集合》的比较研究[J].中学数学月刊,2020(6):44-46.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.
- [4] 黄晓学.少教多学模式研究[M].天津:天津古籍出版社,2016.
- [5] 祝敏芝.核心素养视角下2018年数学高考试题例析[J].中学数学教学参考,2018(11):48-50.
- [6] 王明安.课堂教学要为学生学习创设空间——“平面的基本性质”听课感悟[J].中学数学教学参考,2012(12):14-17.

(上接第10页)

参考文献

- [1] 单增.普通高中课程标准实验教科书(必修·数学2)[M].南京:江苏教育出版社,2012.
- [2] 张恭庆.泛函分析讲义(上册)[M].北京:北京大学出版社,1987:1.
- [3] 张涛,吴跃.引导学生思考 发展核心素养[J].中学数学教学参考,2018(9):33-35.