

高中数学教学中抽象能力的培养^{*}

王红芳 魏志英 (江苏省沙溪高级中学 215421)

在高中数学的教学过程中,教师特别需要关注学生抽象能力的培养.本文从四个方面对该能力的理解和实施进行探讨.

1 数学抽象的深度建立

在概念理解过程中,需要关注理解的深度.理解深度与理论落实息息相关.数学抽象应当超越既有经验,自深度角度对数学内容展开研究.数学抽象特点体现在多个层次,表现的是符号化及形式化内容,其结果具有可靠性.

案例 1 三角函数的概念.

人教 A 版教材从一个引例开始:单位圆上的点 P 以 A 为起点做逆时针方向旋转,建立一个数学模型,刻画点 P 的位置变化情况.

教材把单位圆放在直角坐标系中,把射线 OA 从 x 轴的非负半轴开始,绕点 O 按逆时针方向旋转角 α ,到 OP 位置终止,研究角 α 取一些特殊角时点 P 的坐标,意在揭示结论:对于任意给定一个角 α ,它的终边 OP 与单位圆交点 P 的坐标能唯一确定,进而得出点 P 的横、纵坐标均为角 α 的函数,随即给出了三角函数定义.

应该说,教材这样编写凸显了角变化中的函数特征,并包含有问题探究环节,但是不易为多数学生所理解.仅是这样开展教学,从发展学生思维来衡量显然是有所欠缺的,需要教师依据学生原有的认知去设计相应的问题,帮助学生明白这个抽象性比较强的“任意角”.为此,在教学设计时,应把特殊的角 α 推广到一般情形,即一般情况下如何用角 α 表示点 P 的坐标?可以引导学生先着手研究角 α 为锐角的情形,再推广到钝角和终边在第三象限、第四象限的角等其他一般情形,使学生能够借助初中学习的直角三角形的边角关系来探索研究.这样,不仅可以引发学生思辨、形成协作探究的教学氛围,更能把新旧知识进行有机整合,形成完整的知识链,突破对于任意角的三角函数的概念理解和坐标表示.基于这些特点,数学抽象的教育教学价值可体现在以下几个方面.

首先,是认知数学抽象知识发展史.学生研究数学发展史能对数学有深刻认识,建立对数学抽象知识的认知.数学抽象自古希腊时期提出,古代哲学家将抽象作为数学研究对象,现阶段,数学家强调数学知识学习应当在经验基础上对事物有抽象认识,可作为生活中的抽象.在符号论证基础上再认知为数学抽象,可见数学抽象无法完全脱离生活,高中数学抽象是两者的有机结合.

其次,数学抽象可促进人的成长.数学抽象是人利用数学思维进行抽象的过程,在此过程中人的数学抽象思维本领得以培养.数学抽象也是核心素养中的关键,有利于培养学生能力.

最后,数学抽象认知机制中,从经验角度出发,自形象角度对生活对象进行数学研究,并认为自形象过渡到抽象后数学抽象得以完成,但学生在学习过程中的心理变化还需要教师不断研究.部分群体认为心理认知角度涵盖不同阶段,比如,知觉抽象及图形抽象、数量抽象、类别抽象对应不同认知阶段,也是高中生数学知识学习的重点阶段,在认知角度下对数学抽象作深刻理解具有不可替代的价值.

2 深度理解下的数学抽象知识学习

在高中数学教学过程中,对从认知角度理解数学抽象还需不断研究.通过研究会发现,数学抽象的心理学过程包括认知及内化、应用等不同阶段.教师在教学模式上,可利用翻转课堂及项目学习展开实验探究,培养学生数学抽象能力.这种方式具有显著性、系统性特点,比如,在函数知识教学过程中,需要帮助学生建立函数概念,对应的法则是数学抽象关键词,教师着力点需放在关键词上.在实际教学过程中,函数作为高中数学知识中的重要内容,在教学过程中需关注相应的教学设计.让学生对生活中的函数关系进行分析,使其对函数概念有初步认识后,思路得到有效拓展;生活中似乎没有关系的事物,多数也是存在函数关系的.比如,对于传染病患者人数及时间关系,部分

^{*} 本文系江苏省教育科学“十三五”规划课题“‘指向数学抽象’核心素养的核心概念教学的实践研究”(编号:XC-b/2018/05)的研究成果.

学生认为患病与细菌感染相关,但流行病学研究发现传染人数与时间具有密切的关联,建立这种认知关系后也能构建高中数学知识体系.

在建立函数概念之后,应引导学生对过程进行反思.函数概念的建立过程是用数学语言进行描述的过程,与传统定义教学相关,此间无需进行赘述.从学习反思角度看,以上两个教学环节需要让学生不断反省,比如,针对函数知识展开教学,应当从集合及对应法则角度进行分析.从认知角度看,情景素材有利于刺激学生认知,学生自觉对函数关系进行加工,自信息通道角度让学生完成基础函数思维的对应.比如,学生对传染病感染人数及时间函数关系展开分析,能认识到实际生活中的函数描述关系并理解函数,其中包括知觉抽象及图象抽象、数量抽象等.

3 深度教学中的理解到实施过程

教师在教学过程中从认知角度对数学抽象展开分析往往存在难度,但从核心素养角度上看,展开数学抽象教育相对必要.人们在探究核心素养过程中,还需认识到深度教学的途径、深度学习与教师角色关系的对应,从而转变为深度教学.在数学知识理解的教学过程中,需要教师超越对原有知识的认识,对数学核心素养(包括数学抽象素养)进行深度解读,因而教学模式研究较为重要.对此,在构建形式化的教学过程中,可以关注数学抽象的基本原则,让学生对抽象建构模式进行理解,从实际角度让学生认识到抽象过程,形成认知理解,以此提升模式化思路及学习能力.

案例2 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.

人教A版教材研究了 φ, ω, A 三者对 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响.其中,学生最难理解的是 ω 对 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响.学生借助函数知识,不难知道 $f(x + \varphi)$ 与 $f(x)$ 的图象之间是左右平移关系.但为了便于后续问题研究,教师可以追问:能否借助单位圆去论证这种平移关系?

给出特例 $y = \sin x$ 与 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 引导学生借助图象回顾思考:当点在作圆周运动时, x 和 φ 表示怎样的实际意义.然后基于问题,组织学生以小组为单位开展探究 $y = \sin 2x$ 与 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

经过一番认真又不乏争辩的热烈探讨之后,学生达成了一个共识,也弄清了这个抽象问题的本质.教师进一步启发思考:知道了两个函数图象上对应点之间的关系,如何由函数 $y = \sin x$ 去求出另外一个函数解析式呢?

这个问题虽然教材并未作出要求,但其能够培养学生的逻辑推理能力和数学抽象素养,也为今后学习研究解析几何打下思想方法的基础.教学时必须抓住这样的有利时机,充分用足、用好这个教学素材.

4 数学抽象素养落实方法

教师的任务和目标是通过教学来落实核心素养,但部分研究人员认为,核心素养无法教授.对此,如何在教学实践过程中落实核心素养是教师应当关注的问题.针对上述观点,还需对问题进行研究,培养学生核心素养是长远发展目标,教师无法在课堂上直接教授,但也不表示教师不可有所作为.相反,素养是学生在在学习过程中的积淀,需教师精心开展教学设计,让学生有效将知识内化.也有研究人员认为可以从理解角度出发对数学抽象概念进行分析,并理解抽象的数学内涵及数学抽象的变化过程,从数学抽象的角度培养学生的抽象能力.比如,在圆与圆的位置关系探究过程中,需立足学生角度对问题进行分析及建构.教师可选择直接逻辑建构圆与圆的位置关系,学生根据两个圆的半径之和(差)与圆心距离的关系,判断圆与圆的关系.教学过程中能发现,部分学生在学习这种关系过程中容易发生障碍,出现这种问题的原因是学生没有形成清晰表象,没有形象的表象支撑,学生的思维就无法变得清晰,对后续的学习产生消极影响.为帮助学生建立表象,教师还需为学生设计逐步数学抽象的学习过程.表象及生活经验是学生的认知基础,让学生在画图中积累经验,并从位置关系中提取经验,学生在大脑中形成纯粹的数学过程,但并非是将圆变成数学意义上的圆,而是将脑海中圆与圆的位置关系及认知经验转变为能够用两个圆的半径之和(差)及圆心距离关系展开描述的对象.经过上述过程,学生脑海中能清晰呈现圆与圆的对应位置关系,并能够根据两个圆半径之和(差)及圆心距离关系对这种对应关系进行排序.该教学过程时间较短,但学生脑海中能分析不同的位置关系,这种学习过程较为清晰,表示数学抽象过程具有有效性.