

用 Lagrange 乘数法解一类高考多元最值问题

侯 军 云南省红河州石屏高级中学 QQ: 1449564927

苗 会 云南省红河州石屏高级中学 662200

Lagrange 乘数法是高等数学中求多元函数极值的常用方法, 它虽然涉及到偏导数的知识, 但对于基础较好的高中生来说并不难理解. 适当的介绍些“高观点”对于学生参加数学竞赛或是解答高考客观题都大有裨益, 同时对丰富学生的知识内涵和开阔学生的解题视野也大有帮助, 本文以 Lagrange 乘数法为依托对高考中一类多元最值问题给出统一的、具有普适性的解答, 以期起到抛砖引玉的效果.

Lagrange 乘数法 求在约束条件 $\begin{cases} H(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$ 下 $f(x, y, z)$ 的极值时, 如果我们构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda G(x, y, z) - \mu H(x, y, z),$$

$$\text{可由} \begin{cases} L_x = 0, \\ L_y = 0, \\ L_z = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } (x, y) \text{ 可能的极值点. 其中 } f(x, y, z) \text{ 称为目标函数, } \lambda, \mu \text{ 为 La-}$$

grange 乘数, 这里我们可以把 L_x, L_y, L_z 理解为分别以 x, y, z 为主元求得的导数 (求导时其它非主元的未知数视为常数).

特别的, 若求在条件 $F(x, y, z) = 0$ 下 $f(x, y, z)$ 的极值时, 则只需构造 Lagrange 函数 $L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda F(x, y, z)$ 即可.

例 1 已知 $4x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $2x + y$ 的最大值为_____. (2011 年高考浙江卷理科第 16 题)

解 因为 $4x^2 + y^2 + xy = 1$, 故 $4x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$, 构造 Lagrange 函数 $L(x, y) = 2x + y - \lambda(4x^2 + y^2 + xy - 1)$,

$$\text{则由} \begin{cases} L_x = 2 - 8\lambda x - \lambda y = 0, \\ L_y = 1 - 2\lambda y - \lambda x = 0, \end{cases} \quad \text{得 } y = 2x, \text{ 结合 } 4x^2 + y^2 + xy = 1 \text{ 可知}$$

当 $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $y = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 时, $2x + y$ 取得最大值为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

例 2 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且满足 $a + 2b + 3c = 6$, 则 $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ 的最小值为_____. (2013 高考湖南卷理科第 10 题)

解 因为 $a + 2b + 3c = 6$, 所以 $a + 2b + 3c - 6 = 0$, 构造 Lagrange 函数

$$L(a, b, c) = a^2 + 4b^2 + 9c^2 - \lambda(a + 2b + 3c - 6),$$

$$\text{则由} \begin{cases} L_a = 2a - \lambda = 0, \\ L_b = 8b - 2\lambda = 0, \\ L_c = 18c - 3\lambda = 0 \end{cases} \text{可得 } a = 2b = 3c \text{ 取得极值, 结合 } a + 2b + 3c = 6,$$

可知 $a = 2, b = 1, c = \frac{2}{3}$ 时, $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ 的取得最小值为 12.

例 3 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 则 a 的最大值是_____. (2014 年高考浙江卷文科第 16 题)

解 因为 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 故 $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$, 构造 Lagrange 函数

$$L(a, b, c) = a - \lambda(a + b + c) - \mu(a^2 + b^2 + c^2 - 1),$$

$$\text{则由} \begin{cases} L_a = 1 - \lambda - 2\mu a = 0, \\ L_b = -\lambda - 2\mu b = 0, \\ L_c = -\lambda - 2\mu c = 0 \end{cases} \text{可得 } b = c \text{ 时取得极值,}$$

结合 $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 可知 $a_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

例 4 对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$ 且使 $|2a + b|$ 最大时, $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$ 的最小值为_____. (2014 年高考辽宁卷理科第 16 题)

解 我们不妨将“使 $|2a + b|$ 最大”的问题转化为“使 $(2a + b)^2$ 最大”进行求解. 构造 Lagrange 函数

$$L(a, b) = (2a + b)^2 - \lambda(4a^2 - 2ab + 4b^2 - c),$$

$$\text{则由} \begin{cases} L_a = 4(2a + b) - 8\lambda a + 2b\lambda = 0, \\ L_b = 2(2a + b) - 8\lambda b + 2a\lambda = 0 \end{cases} \text{可得 } 2a = 3b, \text{ 代入 } 4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0 \text{ 得 } c = 10b^2,$$

$$\text{从而 } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = \frac{2}{b} - \frac{4}{b} + \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - 2 \right)^2 - 2 \geq -2.$$

所以, 当 $b = \frac{1}{2}, a = \frac{3}{4}, c = \frac{5}{2}$ 时等号成立, 最小值为 -2.

例 5 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 求 $x^2 - xy + y^2$ 的最大值和最小值. (2006 年安徽省高中数学竞赛初赛, 2012 年无锡市高考数学模拟试题)

解 因为 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 所以 $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$, 构造 Lagrange 函数 $L(x, y) = x^2 - xy + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$,

$$\text{则由} \begin{cases} L_x = 2x - y - 2\lambda x - \lambda y = 0, \\ L_y = 2y - x - 2\lambda y - \lambda x = 0 \end{cases} \text{可得 } x^2 = y^2 \text{ 时取得极值, 结合 } x^2 + xy + y^2 = 3$$

可知当 $x = y$ 时, $x^2 - xy + y^2$ 的取得最小值为 1, 当 $x = -y$ 时, $x^2 - xy + y^2$ 的取得最大值为 9.

通过上述各例我们可以体会到用 Lagrange 乘数法求解这类不等式问题, 解法运作机械, 解题程序固定, 且回避了运用不等式技巧时复杂的思维过程和代数变形, 这也使得 Lagrange 乘数法在解这类给定条件的多元最值问题时十分具有普适性, 是求解此类问题的通性通法.

参考文献:

[1] 陈纪修, 等. 数学分析 (下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.