江苏省仪征中学 2020-2021 学年第一学期高二年级原始计分学科期初摸底测试
数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知不等式$x^2-3x-4>0$的解集为 A，则$A=(\quad)$

A. $(-1,4)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

C. $(-4,1]$　　D. $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$

2. 直线$2x+y+m=0$和$x+2y+n=0$的位置关系是$(\quad)$

A. 平行　　B. 垂直　　C. 相交但不垂直　　D. 不能确定

3. “十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献，十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为f,则第八个单音的频率为$(\quad)$

A. $\sqrt[3]{2}f$　　B. $\sqrt[3]{2^2}f$　　C. $\sqrt[12]{2^5}f$　　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

4. 若实数 a，b 满足$ab=1(a,b>0)$，则$a+2b$的最小值为$(\quad)$

A. 4　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

5. 如果圆$(x-a)^2+(y-a)^2=8$上总存在到原点的距离为$\sqrt{2}$的点，则实数 a 的取值范围是$(\quad)$

A. $(-3,-1)\cup(1,3)$　　B. $(-3,3)$

C. $[-1,1]$　　D. $[-3,-1]\cup[1,3]$

6. 已知正数数列$\{a_n\}$是公比不等于 1 的等比数列，且$lga_1+lga_{2019}=0$，试用推导等差数列前 n 项和的方法探求：若$f(x)=\frac{2}{1+x^2}$，则$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2019})=(\quad)$

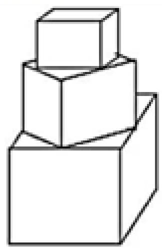
A. 2018　　B. 4036　　C. 2019　　D. 4038

7. 已知函数$f(x)=cosx$，$x\in(0,2\pi)$有两个不同的零点x_1，x_2，且方程$f(x)=m(m\neq0)$有两个不同的实根x_3，x_4，若把这四个数按从小到大排列构成等差数列，则实数$m=(\quad)$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 有一改形塔几何体由若干个正方体构成，构成方式如图所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点．已知最底层正方体的棱长为 8，如果改形塔的最上层正方体的边长小于 1，那么该塔形中正方体的个数至少是$(\quad)$

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 4



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9. 设α，β为两个平面，则<u>不能</u>推出$\alpha//\beta$的是$(\quad)$.

A. α内有无数条直线平行于β

B. α内有两条相交直线分别平行于β

C. α，β平行于同一条直线

D. α，β垂直于同一平面

10. 下列四个命题中，是真命题的是(　).

A. 任意$x \in R$，且$x \neq 0$，$x+\frac{1}{x} \geq 2$

B. 存在$x_0 \in R$，使得$x_0^2+1 \leq 2x_0$

C. 若$x>0$，$y>0$，则$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

D. 当$x \in (1,2)$时，不等式$x^2+mx+4<0$恒成立，则实数 m 的取值范围是$(-\infty,-5]$

11. 已知点$P(x_0,y_0)$，圆 O：$x^2+y^2=r^2(r>0)$，直线 l：$x_0x+y_0y=r^2$，有以下几个结论，其中则不正确的是(　)

A. 若点 P 在圆 O 上，则直线 l 与圆 O 相切；

B. 若点 P 在圆 O 外，则直线 l 与圆 O 相离；

C. 若点 P 在圆 O 内，则直线 l 与圆 O 相交；

D. 无论点 P 在何处，直线 l 与圆 O 恒相切

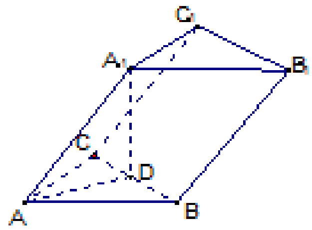
12. 已知数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，其前 n 项和为S_n，且满足$a_1+5a_3=S_8$，则下列选项中正确的是(　).

A. $a_{10}=0$　　B. $S_7=S_{12}$　　C. S_{10}最小　　D. $S_{20}=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=3^n+r$，则$a_2+r=$______.

14. 已知二次不等式$ax^2+2x+b>0$的解集$\{x|x \neq -\frac{1}{a}\}$，且$a>b$，则$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值为_________.



15. 已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点，则异面直线 AB 与CC_1所成的角的余弦值为______.

16. 设函数$f(x)=x^2-3x+a$，已知$\exists t_0 \in (1,3]$，使得当$x \in [1,t_0]$时，$f(x) \leq 0$有解，则实数 a 的取值范围是______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本题满分 10 分）

已知关于 x 的不等式$kx^2-2x+6k<0(k \neq 0)$，

(1)若不等式的解集为$\{x|x<-3或x>-2\}$，求 k 的值；

(2)若不等式的解集为 R，求 k 的取值范围.

18. （本题满分 12 分）

已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且a_2是a_1和a_3-1的等差中项．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=2n-1+a_n(n\in N^*)$，求$\{b_n\}$的前 n 项和S_n．

19. （本题满分 12 分）

在①$S_n=2b_n-1$，②$-4b_n=b_{n-1}(n\geq 2)$，③$b_n=b_{n-1}+2(n\geq 2)$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的 k 存在，求出 k 的值；若 k 不存在，说明理由．

已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=\frac{2}{3}$，$a_3=a_1a_2$，数列$\{b_n\}$的首项$b_1=1$，其前 n 项和为S_n，______，是否存在 k，使得对任意$n\in N*$，$a_nb_n\leq a_kb_k$恒成立？

20. （本题满分 12 分）

已知圆 M：$(x-a)^2+y^2=5$与两条坐标轴都相交，且与直线$x+2y-5=0$相切．

(1)求圆 M 的方程；

(2)若动点 A 在直线$x=5$上，过 A 引圆 M 的两条切线 AB，AC，切点分别为 B，C，求证：直线 BC 恒过定点．

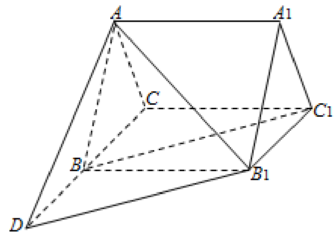
21. （本题满分 12 分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面是边长为 3 的正三角形，侧棱AA_1垂直于底面 ABC，$AA_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，D 是 CB 延长线上一点，且$BD=BC$.

(1)求证：直线$BC_1//$平面AB_1D；

(2)求二面角B_1-AD-B的大小；

(3)求三棱锥C_1-ABB_1的体积.



22. （本题满分 12 分）

等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2$，且a_1，a_2+1，a_3成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若不等式$\frac{a_n}{4n-10}\le 1+\frac{8}{p}$成立的正整数 n 恰有 4 个，求正整数 p 的值.

江苏省仪征中学 2020-2021 学年第一学期高二年级原始计分学科期初摸底测试
数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知不等式$x^2-3x-4>0$的解集为A，则$A=$(　)

A. $(-1,4)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

C. $(-4,1]$　　D. $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$

【答案】B

2. 直线$2x+y+m=0$和$x+2y+n=0$的位置关系是(　)

A. 平行　　B. 垂直　　C. 相交但不垂直　　D. 不能确定

【答案】C

3. “十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献，十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为f，则第八个单音的频率为(　)

A. $\sqrt[3]{2}f$　　B. $\sqrt[3]{2^2}f$　　C. $\sqrt[12]{2^5}f$　　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

【答案】D

4. 若实数a，b满足$ab=1(a,b>0)$，则$a+2b$的最小值为(　)

A. 4　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

5. 如果圆$(x-a)^2+(y-a)^2=8$上总存在到原点的距离为$\sqrt{2}$的点，则实数a的取值范围是(　)

A. $(-3,-1)\cup(1,3)$　　B. $(-3,3)$

C. $[-1,1]$　　D. $[-3,-1]\cup[1,3]$

【答案】D

6. 已知正数数列$\{a_n\}$是公比不等于 1 的等比数列，且$lga_1+lga_{2020}=0$，若$f(x)=\frac{2}{1+x^2}$，则$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2020})=$(　)

A. 2019　　B. 1010　　C. 2020　　D. 4040

【答案】C

解：正数数列$\{a_n\}$是公比不等于 1 的等比数列，且$lga_1+lga_{2019}=0$，

可得$lga_1a_{2019}=0$，即$a_1a_{2019}=1$，

即有$a_1a_{2019}=a_2a_{2018}=\cdots=a_{1009}a_{1011}=a_{1010}=1$，

$f(x)=\frac{2}{1+x^2}$，可得$f(\frac{1}{x})=\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{2x^2}{1+x^2}$，

即有$f(x)+f(\frac{1}{x})=2$，

设$S=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2020})$，

又$S=f(a_{2019})+f(a_{2018})+\cdots+f(a_1)$，

相加可得$2S=[f(a_1)+f(a_{2019})]+[f(a_2)+f(a_{2018})]+\cdots+\{f(a_{2020})+f(a_1)]$

$=2\times2020$，

解得$S=2020$.

故选：C.

7. 已知函数$f(x)=cosx$，$x\in(0,2\pi)$有两个不同的零点x_1，x_2，且方程$f(x)=m(m\neq0)$有两个不同的实根x_3，x_4，若把这四个数按从小到大排列构成等差数列，则实数$m=$(　)

A. $\frac{1}{2}$　　　　　　B. $-\frac{1}{2}$　　　　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】解：由题意可知：$x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{3\pi}{2}$，且x_3、x_4只能分布在x_1、x_2的中间或两侧，

若x_3、x_4只能分布在x_1、x_2的中间，则公差$d=\frac{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{3}=\frac{\pi}{3}$，

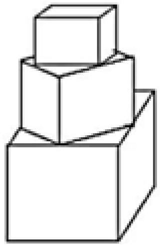
故x_3、x_4分别为$\frac{5\pi}{6}$、$\frac{7\pi}{6}$，此时可求得$m=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

若x_3、x_4只能分布在x_1、x_2的两侧，则公差$d=\frac{3\pi}{2}=\pi$，

故x_3、x_4分别为$-\frac{\pi}{2}$、$\frac{5\pi}{2}$，不合题意.

故选：D.

8. 有一改形塔几何体由若干个正方体构成，构成方式如图所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点．已知最底层正方体的棱长为 8，如果改形塔的最上层正方体的边长小于 1，那么该塔形中正方体的个数至少是(　)



A. 8　　　　　B. 7　　　　　C. 6　　　　　D. 4

【答案】A

【解析】解：最底层正方体的棱长为 8，

则从下往上第二层正方体的棱长为：$\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

从下往上第三层正方体的棱长为：$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$，

从下往上第四层正方体的棱长为：$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

从下往上第五层正方体的棱长为：$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$，

从下往上第六层正方体的棱长为：$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

从下往上第七层正方体的棱长为：$\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1$，

从下往上第八层正方体的棱长为：$\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴改形塔的最上层正方体的边长小于 1，那么该塔形中正方体的个数至少是 8.

故选：A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9.　设α，β为两个平面，则不能推出$\alpha//\beta$的是

A. α内有无数条直线平行于β

B. α内有两条相交直线分别平行于β

C. α，β平行于同一条直线

D. α，β垂直于同一平面

【答案】ACD

【解析】解：对于A，α内有无数条直线与β平行，当这无数条直线互相平行时，α与β可能相交，所以A不正确;

对于B，根据两平面平行的判定定理与性质知，B正确;

对于C，平行于同一条直线的两个平面可能相交，也可能平行，所以C不正确;

对于D，垂直于同一平面的两个平面可能相交，也可能平行，

如长方体的相邻两个侧面都垂直于底面，但它们是相交的，所以D不正确.

故选ACD.

10.　下列四个命题中，是真命题的是(　).

A. 任意$x\in R$，且$x\neq 0$，$x+\frac{1}{x}\geq 2$

B. 存在$x_0\in R$，使得$x_0^2+1\leq 2x_0$

C. 若$x>0$，$y>0$，则$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\frac{x+y}{2}$

D. 当$x\in(1,2)$时，不等式$x^2+mx+4<0$恒成立，则实数 m 的取值范围是$(-\infty,-5]$

【答案】BCD

11. 已知点$P(x_0,y_0)$，圆 O：$x^2+y^2=r^2(r>0)$，直线 l：$x_0x+y_0y=r^2$，有以下几个结论，其中则不正确的是(　)

A. 若点 P 在圆 O 上，则直线 l 与圆 O 相切；

B. 若点 P 在圆 O 外，则直线 l 与圆 O 相离；

C. 若点 P 在圆 O 内，则直线 l 与圆 O 相交；

D. 无论点 P 在何处，直线 l 与圆 O 恒相切

【答案】BCD

【解析】

解：对于 A，若 P 在圆上，则有${x_0}^2+{y_0}^2=r^2$，

又圆心 O 到直线的距离$d=\frac{|-r^2|}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}=\frac{r^2}{r}=r$，此时直线与圆相切，正确；

对于 B，若 P 在圆外，则有${x_0}^2+{y_0}^2>r^2$，

又圆心 O 到直线的距离$d=\frac{|-r^2|}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}<\frac{r^2}{r}=r$，此时直线与圆相交，错误；

对于 C，若 P 在圆内，则有${x_0}^2+{y_0}^2<r^2$，

又圆心 O 到直线的距离$d=\frac{|-r^2|}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}>\frac{r^2}{r}=r$，此时直线与圆相离，错误；

由上可知，D 错误．

故选 BCD．

12. 已知数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，其前 n 项和为S_n，且满足$a_1+5a_3=S_8$，则下列选项中正确的是(　)．

A. $a_{10}=0$　　B. $S_7=S_{12}$　　C. S_{10}最小　　D. $S_{20}=0$

【答案】AB

【解析】

【分析】

本题考查了等差数列的通项公式和性质，考查了等差数列的求和，属于基础题．

由等差数列的通项公式和性质、等差数列的求和公式对每一项进行分析即可得答案．

【解答】

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq0)$，

由$a_1+5a_3=S_8$，可得$a_1+9d=0$，即$a_{10}=0$，故选项 A 正确．

因为$S_{12}-S_7=a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$
$=5a_{10}=0$，所以$S_7=S_{12}$，故选项 B 正确．

当$d>0$时，S_9和S_{10}最小，当$d<0$时，S_9和S_{10}最大，故选项 C 错误．

因为$S_{19}=19a_{10}=0$，$a_{20}\neq0$，所以$S_{20}\neq0$，故选项 D 错误．

故选 AB．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=3^n+r$，则$a_2+r=$______．

【答案】5

【解析】解：$S_n=3^n+r$，

$\therefore S_1=a_1=3+r$，$S_2=a_1+a_2=9+r$，

$\therefore a_2=6$，

$\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=27+r$，

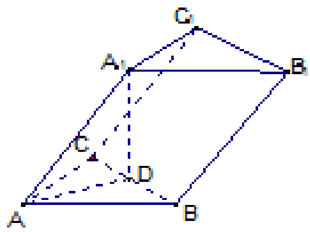
$\therefore a_3 = 18$，
$\therefore q = 3$，$r = -1$，
$\therefore a_2 + r = 5$
故答案为：5

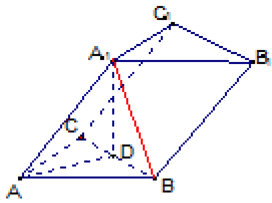
14. 已知二次不等式$ax^2 + 2x + b > 0$的解集$\{x|x \neq -\frac{1}{a}\}$，且$a > b$，
则$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值为__________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】解：$\because$二次不等式$ax^2 + 2x + b > 0$的解集$\{x|x \neq -\frac{1}{a}\}$，
$\therefore a > 0$，且对应方程有两个相等的实根为$-\frac{1}{a}$
由根与系数的故关系可得$-\frac{1}{a} \cdot (-\frac{1}{a}) = \frac{b}{a}$，即$ab = 1$
故$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2}{a-b} = (a-b) + \frac{2}{a-b}$，
$\because a > b$，$\therefore a - b > 0$，由基本不等式可得
$(a-b) + \frac{2}{a-b} \geq 2\sqrt{(a-b)\frac{2}{a-b}} = 2\sqrt{2}$，
当且仅当$a - b = \sqrt{2}$时取等号
故$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值为：$2\sqrt{2}$
故答案为：$2\sqrt{2}$

15. 已知三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点，则异面直线 AB 与CC_1所成的角的余弦值为_______.





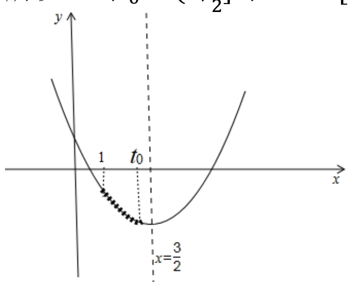
【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】解：三棱柱的性质可知，$C_1C//A_1A$，异面直线 AB 与CC_1所成的角就是$\angle A_1AB$，连接A_1B，三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面 ABC 上的射影为 BC 的中点，$A_1D \perp BC$，$\therefore A_1DB$是直角三角形，
设$DB = 1$，则$AB = A_1A = 2$．$AD \perp BC \therefore AD = \sqrt{3}$
$\therefore A_1D = 1$．故得$A_1B = \sqrt{2}$.
在$\triangle A_1AB$中，余弦定理：$\cos\angle A_1AB = \frac{A_1A^2+AB^2-A_1B^2}{2A_1A \cdot AB} = \frac{4+4-2}{2\times2\times2} = \frac{3}{4}$.
故答案为：$\frac{3}{4}$.

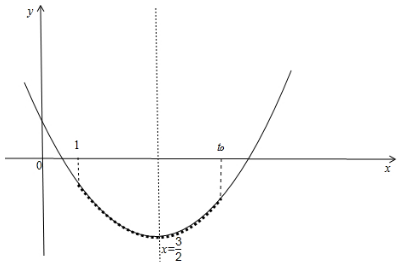
16. 设函数$f(x) = x^2 - 3x + a$，已知$\exists t_0 \in (1,3]$，使得当$x \in [1, t_0]$时，$f(x) \leq 0$有解，则实数 a 的取值范围是_______.

【答案】$(-\infty, 2]$

【解析】解：$\because f(x)$的对称轴为$x = \frac{3}{2}$，
所以，当$t_0 \in (1, \frac{3}{2}]$时，$x \in [1, t_0]$位于对称轴左侧，草图如下：



此时$f(x)_{min} = f(t_0) = t_0^2 - 3t_0 + a \leq 0$，
又对于任意$t_0 \in (1, \frac{3}{2}]$均成立，
因此$a \leq -(t_0^2 - 3t_0)_{min} = 2$；
又，当$t_0 \in (\frac{3}{2}, 3]$时，$x \in [1, t_0]$越过对称轴，草图如下：



此时$f(x)_{min}=f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+a\le 0$，

解得$a\le\frac{9}{4}$；

综上，$a\le\frac{9}{4}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）

已知关于 x 的不等式$kx^2-2x+6k<0(k\ne 0)$，

(1)若不等式的解集为$\{x|x<-3或x>-2\}$，求 k 的值；

(2)若不等式的解集为 R，求 k 的取值范围.

【答案】解(1) ∵关于 x 的不等式$kx^2-2x+6k<0(k\ne 0)$的解集为$\{x|x<-3或x>-2\}$，

∴ $x_1=-3$，$x_2=-2$是方程$kx^2-2x+6k=0$的两根，所以$x_1+x_2=\frac{2}{k}=-5$，∴ $k=-\frac{2}{5}$.

(2)若不等式的解集为 R，即$kx^2-2x+6k<0$恒成立，

则满足$\begin{cases}k<0\\ \Delta=4-24k^2<0\end{cases}$，求得$k<-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

18.（本题满分 12 分）

已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且a_2是a_1和a_3-1的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=2n-1+a_n(n\in N^*)$，求$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

【答案】解：(1)设公比为 q，∵ $a_1=1$，则$a_2=q$，$a_3=q^2$.

∵ a_2是a_1和a_3-1的等差中项.

∴ $2a_2=a_1+a_3-1$，

∴ $2q=1+q^2-1$，

∵ $q\ne 0$，解得$q=2$.

∴ $a_n=2^{n-1}$.

(2) ∵ $b_n=2n-1+a_n=2n-1+2^{n-1}$.

∴ $\{b_n\}$的前 n 项和$S_n=[1+3+\cdots+(2n-1)]+[1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}]=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{2^n-1}{2-1}$

$=n^2+2^n-1$.

19.（本题满分 12 分）

在①$S_n=2b_n-1$，②$-4b_n=b_{n-1}(n\ge 2)$，③$b_n=b_{n-1}+2(n\ge 2)$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的 k 存在，求出 k 的值；若 k 不存在，说明理由.

已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=\frac{2}{3}$，$a_3=a_1a_2$，数列$\{b_n\}$的首项$b_1=1$，其前 n 项和为S_n，_______，是否存在 k，使得对任意$n\in N*$，$a_nb_n\le a_kb_k$恒成立？

【答案】①

【解析】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，因为$a_1=\frac{2}{3}$，所以$a_3=a_1a_2$，

∴ $\frac{2}{3}q^2=(\frac{2}{3})^2q$，解得$q=\frac{2}{3}$.

∴ $a_n=(\frac{2}{3})^n$.

①$S_n=2b_n-1$，则$S_{n-1}=2b_{n-1}-1(n\ge 2)$，

两式相减整理得$\frac{b_n}{b_{n-1}}=2(n\ge 2)$，又$b_1=1$，

所以$\{b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以$b_n=2^{n-1}$，

所以$a_nb_n=(\frac{2}{3})^n\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{2}\times(\frac{4}{3})^n$，

由指数函数的性质知，数列$\{a_nb_n\}$单调递增，没有最大值，
所以不存在$n\in N^*$，使得对任意$a_nb_n\le a_kb_k$恒成立.

②由$-4b_n=b_{n-1}(n\ge 2)$，$b_1=1$，知数列$\{b_n\}$是首项为 1，公比为$-\frac{1}{4}$的等比数列，

所以$b_n=(-\frac{1}{4})^{n-1}$，

所以$a_nb_n=(\frac{2}{3})^n\cdot(-\frac{1}{4})^{n-1}=(-4)\times(-\frac{1}{6})^n$，

因为$a_nb_n=(-4)\times(-\frac{1}{6})^n\le 4\times(\frac{1}{6})^n\le 4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，当且仅当$n=1$时取得最大值$\frac{2}{3}$，

所以存在$k=1$，使得对任意$n\in N^*$，$a_nb_n\le a_kb_k$恒成立.

③由$b_n=b_{n-1}+2(n\ge 2)$知数列$\{b_n\}$是公差为 2 的等差数列，

数列$\{b_n\}$的首项$b_1=1$，公差$d=2$.

$\therefore b_n=1+2(n-1)=2n-1$.

$a_nb_n=(2n-1)\cdot(\frac{2}{3})^n>0$.

$\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\frac{(2n+1)(\frac{2}{3})^{n+1}}{(2n-1)(\frac{2}{3})^n}=\frac{4n+2}{6n-3}=\frac{2}{3}(1+\frac{2}{2n-1})=f(n)$，

$f(1)=2$，$f(2)=\frac{10}{9}$，$f(3)=\frac{14}{15}$，$n\ge 3$时，$f(n)<1$.

因此存在正整数$k=3$，使得对任意$n\in N^*$，$a_nb_n\le a_kb_k$恒成立.

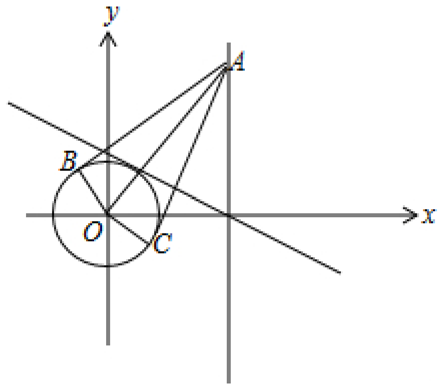
20.（本题满分 12 分）

已知圆 M：$(x-a)^2+y^2=5$与两条坐标轴都相交，且与直线$x+2y-5=0$相切.

(1)求圆 M 的方程；

(2)若动点 A 在直线$x=5$上，过 A 引圆 M 的两条切线 AB，AC，切点分别为 B，C，求证：直线 BC 恒过定点.

【答案】解：(1)圆 M：$(x-a)^2+y^2=5$的圆心坐标为$(a,0)$，半径为$\sqrt{5}$，



$\because$圆 M 与直线$x+2y-5=0$相切，

$\therefore \frac{|a-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，即$a=0$或$a=10$.

又圆 M 与两条坐标轴都相交，$\therefore a=0$.

则圆 M 的方程为：$x^2+y^2=5$；

证明：(2)设$A(5,m)$，则 A，B，O，C 四点共圆，

AO 的中点为$(\frac{5}{2},\frac{m}{2})$，$|AO|=\sqrt{25+m^2}$，

则以 AO 为直径的圆的方程为$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{m}{2})^2=\frac{1}{4}(25+m^2)$，

整理得：$x^2+y^2-5x-my=0$.

又圆 M：$x^2+y^2=5$，

两圆联立可得公共弦 BC 所在直线方程为$5x+my-5=0$.

$\therefore$直线 BC 恒过定点$(1,0)$.

21.（本题满分 12 分）

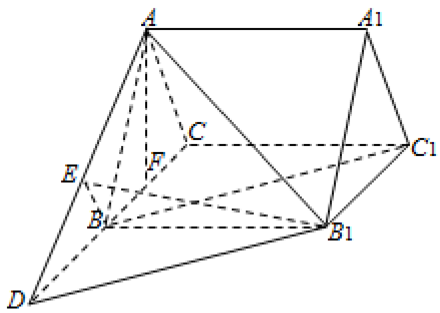
如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面是边长为 3 的正三角形，侧棱AA_1垂直于底面 ABC，$AA_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，D 是 CB 延长线上一点，且$BD=BC$.

(1)求证：直线$BC_1//$平面AB_1D；

(2)求二面角B_1-AD-B的大小；

(3)求三棱锥C_1-ABB_1的体积.

【答案】解：(1) $\because CB//C_1B_1$，且$BD=BC=B_1C_1$，



$\therefore$四边形BDB_1C_1是平行四边形，可得$BC_1//DB_1$.

又$B_1D\subset$平面AB_1D，$BC_1\not\subset$平面AB_1D，

$\therefore$直线$BC_1//$平面AB_1D

(2)过 B 作$BE\perp AD$于 E，连接EB_1

$\because BB_1\perp$平面 ABD，$\therefore BE$是B_1E在平面 ABD 内的射影

结合$BE\perp AD$，可得$B_1E\perp AD$，

$\therefore \angle B_1EB$是二面角B_1-AD-B的平面角.
$\because BD=BC=AB$，
$\therefore$ E是 AD 的中点，得 BE 是三角形 ACD 的中位线，所以$BE=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$.
在$Rt\vartriangle BB_1E$中，$\tan\angle B_1EB=\frac{B_1B}{BE}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}$
$\therefore \angle B_1EB=60°$，即二面角$B_1-AD-B$的大小为$60°$
(3)过 A 作$AF\perp BC$于 F，
$\because BB_1\perp$平面 ABC，$BB_1\subset$平面BB_1C_1C
$\therefore$平面$BB_1C_1C\perp$平面 ABC
$\because AF\perp BC$，平面$BB_1C_1C\cap$平面$ABC=BC$
$\therefore AF\perp$平面BB_1C_1C，即 AF 为点 A 到平面BB_1C_1C的距离.
$\because$正三角形 ABC 中，$AF=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，
$\therefore$三棱锥C_1-ABB_1的体积$V_{C1-ABB1}=V_{A-C1BB1}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{27}{8}$.

22.（本题满分 12 分）
等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2$，且a_1，a_2+1，a_3成等差数列.
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；
(2)若不等式$\frac{a_n}{4n-10}\leq 1+\frac{8}{p}$成立的正整数 n 恰有 4 个，求正整数 p 的值.
【答案】解：(1)等比数列$\{a_n\}$的公比设为 q，
由$a_1=2$，且a_1，a_2+1，a_3成等差数列，
可得$2(a_2+1)=a_1+a_3$，即有$2(2q+1)=2+2q^2$，
解得$q=2$(0舍去)，则$a_n=2^n$，$n\in N*$；
(2)由(1)可得$\frac{2^{n-1}}{2n-5}\leq 1+\frac{8}{p}$，
当$n=1$，2 时，上式左边小于 0，不等式恒成立；
当$n=3$时，不等式即为$4\leq 1+\frac{8}{p}$，解得$1\leq p\leq\frac{8}{3}$;
当$n=4$时，不等式即为$\frac{8}{3}\leq 1+\frac{8}{p}$，解得$1\leq p\leq\frac{24}{5}$;
当$n=5$时，不等式即为$\frac{16}{5}\leq 1+\frac{8}{p}$，解得$1\leq p\leq\frac{40}{11}$，
当$n=6$时，不等式即为$\frac{32}{7}\leq 1+\frac{8}{p}$，解得$1\leq p\leq\frac{56}{25}$，
…
设$b_n=\frac{2^{n-1}}{2n-5}$，则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2(2n-5)}{2n-3}=2(1-\frac{2}{2n-3})$，当$n\geq 4$时，$2(1-\frac{2}{2n-3})\geq\frac{6}{5}>1$，
可得当$n\geq 4$时，$\{b_n\}$随着 n 的增大而增大，
由不等式$\frac{a_n}{4n-10}\leq 1+\frac{8}{p}$成立的正整数 n 恰有 4 个，可得$n=1$，2，4，5，
此时正整数$p=3$.