

江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学周末限时训练 10 (2018.11.24)

范围：江苏高考 I 卷全部内容

一、填空题（共计 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分）

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $A \cap \mathbb{Z} =$ _____.

2. 若复数 $z = (1-i)(m+2i)$ (i 为虚数单位) 是纯虚数, 则实数 m 的值为_____.

3. 数据 10, 6, 8, 5, 6 的方差 $s^2 =$ _____.

4. 抛掷甲、乙两枚质地均匀且四面上分别标有 1, 2, 3, 4 的正四面体, 记底面上的数字分别为 x, y , 则 $\frac{x}{y}$ 为整数的概率是_____.

5. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x + \sqrt{3}y = 0$, 则 $m =$ _____.

6. 执行如图所示的算法流程图, 则输出的结果是_____.

7. 底面边长为 2, 侧棱长为 $\sqrt{3}$ 的正四棱锥的体积为_____.

8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1, a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$, 则 $a_7 =$ _____.

9. 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \vec{a} + \vec{b} = (1, \sqrt{2})$, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为_____.

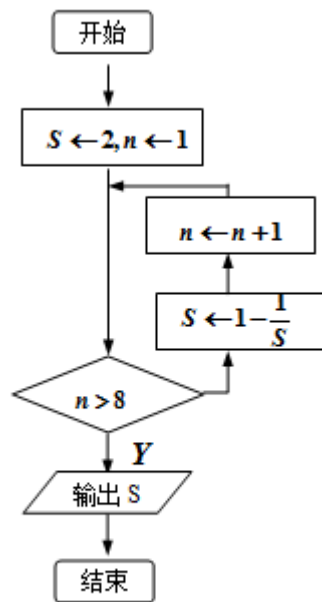
10. 直线 $ax + y + 1 = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 - 2ax + a = 0$ 截得的弦长为 2, 则实数 a 的值是_____.

11. 将函数 $f(x) = -x^2 + 2x$, 则不等式 $f(\log_2 x) < f(2)$ 的解集为_____.

12. 将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位, 若所得图象过点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 φ 的最小值为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 3$, 角 A 的平分线与 AB 边上的中线交于点 O , 若 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC} (x, y \in \mathbb{R})$, 则 $x + y$ 的值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ (e 为自然对数的底数), $g(x) = x^2 - ax - a + 3$, 若存在实数 x_1, x_2 , 使得 $f(x_1) = g(x_2) = 0$, 且 $|x_1 - x_2| \leq 1$, 则实数 a 的取值范围是_____.



第 6 题图

二、解答题:

15. (本小题满分 14 分) 已知向量 $\vec{a} = (\sin x, \frac{3}{2})$, $\vec{b} = (\cos x, -1)$.

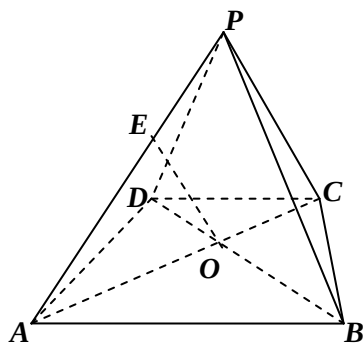
(1) 当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, 求 $2\cos^2 x - \sin 2x$ 的值;

(2) 求 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的值域.

16. (本小题满分 14 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, AC 与 BD 交于点 O , 且平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, E 为棱 PA 上一点.

(1) 求证: $BD \perp OE$;

(2) 若 $AB = 2CD$, $AE = 2EP$, 求证: $EO \parallel$ 平面 PBC .

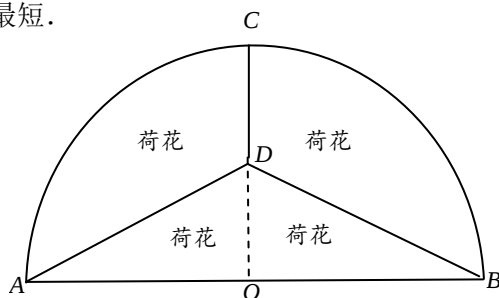


第 16 题图

17. (本小题满分 14 分) 某湿地公园围了一个半圆形荷花塘如图所示, 为了提升荷花池的观赏性, 现计划在池塘的中轴线 OC 上设计一个观景台 D (点 D 与点 O, C 不重合), 其中 AD, BD, CD 段建设架空木栈道, 已知 $AB = 2 \text{ km}$, 设建设的架空木栈道的总长为 $y \text{ km}$.

(1) 设 $\angle DAO = \theta (\text{rad})$, 将 y 表示成 θ 的函数关系式, 并写出 θ 的取值范围;

(2) 试确定观景台的位置, 使三段木栈道的总长度最短.



18. (本小题满分 16 分) 已知椭圆 $E: x^2 + 9y^2 = m^2$ ($m > 0$), 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 E 有两个交点 A, B , 线段 AB 的中点为 M .

(1) 若 $m = 3$, 点 K 在椭圆 E 上, F_1, F_2 分别为椭圆的两个焦点, 求 $\overrightarrow{KF_1} \cdot \overrightarrow{KF_2}$ 的范围;

(2) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

(3) 若 l 过点 $(m, \frac{m}{3})$, 射线 OM 与椭圆 E 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时直线 l 斜率; 若不能, 说明理由.

19. (本小题满分 16 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} + k (n \in N^*, k \in R)$, 且 $a_1 = 2, a_3 + a_5 = -4$.
- (1) 若 $k = 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;
- (2) 若 $a_4 = -1$, ①求证: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等差数列; ②求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

20. (本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x) = \cos x + ax^2 - 1, a \in R$.
- (1) 求证: 函数 $f(x)$ 是偶函数;
- (2) 当 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的最大值和最小值;
- (3) 若对于任意的实数 x 恒有 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学周末限时训练 10 答案

一．填空题：

1. $\{-1, 0, 1\}$ 2. -2 3. $\frac{16}{5}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6. -1 7. $\frac{4}{3}$
 8. 4 9. $\frac{2}{3}\pi$ 10. -2 11. $(0, 1) \cup (4, +\infty)$ 12. $\frac{\pi}{6}$ 13. $\frac{5}{8}$ 14. $[2, 3]$

二．解答题：

15. (1) $\because \vec{a} \parallel \vec{b}$, $\therefore \frac{3}{2} \cos x + \sin x = 0$, $\therefore \tan x = -\frac{3}{2}$ 3 分

$$2 \cos^2 x - \sin 2x = \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2 - 2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{20}{13} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) $\because \vec{a} + \vec{b} = (\sin x + \cos x, \frac{1}{2})$, $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$

$\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$, $\therefore -\frac{3\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$, $\therefore -1 \leq \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 10 分

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}]$ 14 分

16. (1) 因为平面 $PAC \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAC \cap$ 底面 $ABCD = AC$, $BD \perp AC$,

$BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAC , 又因为 $OE \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BD \perp OE$6 分

(2) 因为 $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, AC 与 BD 交于 O , 所以 $CO:OA = CD:AB = 1:2$,

又因为 $AE = 2EP$, 所以 $CO:OA = PE:EA$, 所以 $EO \parallel PC$, 又因为 $PC \subset$ 平面 PBC ,

$EO \not\subset$ 平面 PBC , 所以 $EO \parallel$ 平面 PBC14 分

17. 解: (1) 由 $\angle DAO = \theta$, $OC \perp AB$, $OA = OB = 1$,

则 $DA = DB = \frac{1}{\cos \theta}$, $DO = \tan \theta$, 所以 $DC = 1 - \tan \theta$,4 分

所以 $y = DA + DB + DC = \frac{2}{\cos \theta} + 1 - \tan \theta = \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta} + 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$7 分

(注：表达式 2 分， θ 的取值范围 1 分)

(2) $y' = \frac{2 \sin \theta - 1}{\cos^2 \theta}$,9 分

令 $y' = 0$, 得 $\sin \theta = \frac{1}{2}$, 又 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$,10 分

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 时, $y' < 0$, y 是 θ 的减函数; 当 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时, $y' > 0$, y 是 θ 的增函数.
.....12 分

所以, 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $y_{\min} = \sqrt{3} + 1$, 此时 $DO = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$13 分

答: 当 D 位于线段 AB 的中垂线上且距离 AB 边 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ km 处时, 能使三段木栈道总长度最短.
.....14 分

18. 解: (I) $m = 3$, 椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, 两个焦点 $F_1(-2\sqrt{2}, 0), F_2(2\sqrt{2}, 0)$,

设 $K(x, y), \overrightarrow{F_1K} = (x + 2\sqrt{2}, y), \overrightarrow{F_2K} = (x - 2\sqrt{2}, y),$
 $\overrightarrow{KF_1} \cdot \overrightarrow{KF_2} = \overrightarrow{FK_1} \cdot \overrightarrow{F_2K} = (x + 2\sqrt{2}, y) \cdot (x - 2\sqrt{2}, y) = x^2 + y^2 - 8 = -8y^2 + 1,$
 $\because -1 \leq y \leq 1, \therefore \overrightarrow{KF_1} \cdot \overrightarrow{KF_2}$ 的范围是 $[-7, 1]$ (4 分)

(2) 设 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} x_1^2 + 9y_1^2 = m^2, \\ x_2^2 + 9y_2^2 = m^2. \end{cases}$ 两式相减, 得
 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 9(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0, 1 + 9 \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} = 0$, 即 $1 + 9k_{OM} \cdot k_l = 0$, 故
 $k_{OM} \cdot k_l = -\frac{1}{9}$; (8 分)

(3) $\because$ 直线 l 过点 $(m, \frac{m}{3})$,
 $\therefore$ 直线 l 不过原点且与椭圆 E 有两个交点的充要条件是 $k > 0$ 且 $k \neq \frac{1}{3}$.

设 $P(x_p, y_p)$, 设直线 $l: y = k(x - m) + \frac{m}{3} (m \neq 0, k \neq 0)$, 即 $l: y = kx - km + \frac{m}{3}$,

由 (2) 的结论可知 $OM: y = -\frac{1}{9k}x$, 代入椭圆方程得, $x_p^2 = \frac{9m^2k^2}{9k^2 + 1}$, (10 分)

由 $y = k(x - m) + \frac{m}{3}$ 与 $y = -\frac{1}{9k}x$, 联立得 $M \left(\frac{9k^2m - 3km}{9k^2 + 1}, -\frac{km - \frac{m}{3}}{9k^2 + 1} \right)$. (12 分)

若四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 那么 M 也是 OP 的中点, 所以 $2x_0 = x_p$,

即 $4 \left(\frac{9k^2m - 3km}{9k^2 + 1} \right)^2 = \frac{9m^2k^2}{9k^2 + 1}$, 整理得 $9k^2 - 8k + 1 = 0$ 解得, $k = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{9}$.

所以当 $k = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{9}$ 时, 四边形 $OAPB$ 为平行四边形. (16 分)

19. (1) 当 $k = 0$ 时, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 即 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$,
所以, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.2 分

设数列 $\{a_n\}$ 公差为 d , 则 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ 2a_1 + 6d = -4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ d = -\frac{4}{3}. \end{cases}$ 4 分

所以, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}n^2 + \frac{8}{3}n$6 分

(2) 由题意, $2a_4 = a_3 + a_5 + k$, 即 $-2 = -4 + k$, 所以 $k = 2$8 分

又 $a_4 = 2a_3 - a_2 - 2 = 3a_2 - 2a_1 - 6$, 所以 $a_2 = 3$, 由 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} + 2$,

得 $(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = -2$,

所以, 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1 = 1$ 为首项, -2 为公差的等差数列.

所以 $a_{n+1} - a_n = -2n + 3$,10 分

当 $n \geq 2$ 时, 有 $a_n - a_{n-1} = -2(n-1) + 3$,

于是, $a_{n-1} - a_{n-2} = -2(n-2) + 3$,

$a_{n-2} - a_{n-3} = -2(n-3) + 3$,

...

$a_3 - a_2 = -2 \times 2 + 3$,

$a_2 - a_1 = -2 \times 1 + 3$,

叠加得, $a_n - a_1 = -2(1 + 2 + \dots + (n-1)) + 3(n-1), (n \geq 2)$,

所以 $a_n = -2 \times \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) + 2 = -n^2 + 4n - 1, (n \geq 2)$,13 分

又当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2$ 也适合.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -n^2 + 4n - 1, n \in \mathbf{N}^*$14

20. (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{P}$,

因为 $f(-x) = \cos(-x) + a(-x)^2 - 1 = \cos x + ax^2 - 1 = f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是偶函数.3 分

(2) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \cos x + x^2 - 1$, 则 $f'(x) = -\sin x + 2x$,

令 $g(x) = f'(x) = -\sin x + 2x$, 则 $g'(x) = -\cos x + 2 > 0$, 所以 $f'(x)$ 是增函数,

又 $f'(0)=0$ ，所以 $f'(x) \geq 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是增函数，

又函数 $f(x)$ 是偶函数，

故函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的最大值是 π^2-2 ，最小值为 0 。8分

$$(3) f'(x) = -\sin x + 2ax,$$

令 $g(x) = f'(x) = -\sin x + 2ax$ ，则 $g'(x) = -\cos x + 2a$ ，

①当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时， $g'(x) = -\cos x + 2a \geq 0$ ，所以 $f'(x)$ 是增函数，

又 $f'(0)=0$ ，所以 $f'(x) \geq 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数，

而 $f(0)=0$ ， $f(x)$ 是偶函数，

故 $f(x) \geq 0$ 恒成立。12分

②当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时， $g'(x) = -\cos x + 2a \leq 0$ ，所以 $f'(x)$ 是减函数，

又 $f'(0)=0$ ，所以 $f'(x) \leq 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

而 $f(0)=0$ ， $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x) < 0$ ，与 $f(x) \geq 0$ 矛盾，故舍去。14分

③当 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时，必存在唯一 $x_0 \in (0, \pi)$ ，使得 $g'(x_0)=0$ ，

因为 $g'(x) = -\cos x + 2a$ 在 $[0, \pi]$ 上是增函数，

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时， $g'(x) < 0$ ，即 $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上是减函数，

又 $f'(0)=0$ ，所以当 $x \in (0, x_0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，即 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上是减函数，

而 $f(0)=0$ ，所以当 $x \in (0, x_0)$ 时， $f(x) < 0$ ，与 $f(x) \geq 0$ 矛盾，故舍去。

综上，实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 。16分