江苏省仪征中学2018-2019学年第二学期期末复习讲义(4)

一、填空题：

1. 设i是虚数单位，复数$\dfrac{1+ai}{2+i}$为纯虚数，则实数a的值为__________.

2. 使“$M>N$”成立的一个__________条件是“$\log_3 M>\log_3 N$”.（从“充要”、“充分不必要”、“必要不充分”中选择一个正确的填写）

3. 曲线$y=\dfrac{x}{x-2}$在点(1，－1)处的切线方程为__________.

4.若把英语单词“good”的字母顺序写错了，则可能出现的错误方法共有__________种.

5.用数学归纳法证明等式$1+2+3+\cdots+(n+3)=\dfrac{(n+3)(n+4)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$时，第一步验证$n=1$时，左边应取的项是__________.

6. 观察下列等式：

$$1=1$$

$$2+3+4=9$$

$$3+4+5+6+7=25$$

$$4+5+6+7+8+9+10=49$$

照此规律归纳第n（$n\in\mathbb{N}^*$）个等式，应为__________.

7．定义在R上的奇函数$f(x)$满足：当$x>0$时，$f(x)=2^x+\log_2 x$，则方程$f(x)=0$的实根的个数为__________.

8. 设m为正整数，$(x+y)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，$(x+y)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b。若$13a=7b,$ 则$m=$__________.

9．已知$f(x)=\ln(x^2-ax+2a-2)(a>0)$在$[1,+\infty)$上是增函数，则$a$的取值范围是__________.

10. 已知$f(x)=a-\dfrac{1}{2^x-1}$是定义在$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$上的奇函数，则$f(x)$的值域为__________.

11.设实数$a\ge 1$，使得不等式$x|x-a|+\frac{3}{2}\ge a$ ，对任意的实数$x\in[1,2]$恒成立，则满足条件的实数a的范围是__________.

12.定义在R上的函数$f(x)$满足：$f(x)+f'(x)>1, f(0)=4$，则不等式$e^x f(x)>e^x+3$的解集是__________.

二、解答题：

13．已知函数$g(x)=ax^2-2ax+1+b,(a>0)$在区间$[2,3]$上的最大值为4，最小值为1，记$f(x)=g(|x|)$.

（1）求实数a、b的值；

（2）若不等式$f(\log_2 k)>f(\frac{1}{2})$成立，求实数$k$的取值范围；

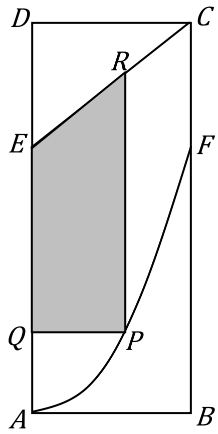
14.设函数$f(x)=\frac{-2^x+a}{2^{x+1}+b}(a>0,b>0)$.

（1）当$a=b=2$时，证明：函数$f(x)$不是奇函数；

（2）设函数$f(x)$是奇函数，求a与b的值；

（3）在（2）条件下，证明函数$f(x)$在R上单调递减，并求不等式$f(x)>-\frac{1}{6}$的解集.

15．某地政府为科技兴市，欲在如图所示的矩形 $ABCD$ 的非农业用地中规划出一个高科技工业园区（如图中阴影部分），形状为直角梯形 $QPRE$（线段 EQ 和 RP 为两个底边），已知 $AB=2km, BC=6km, AE=BF=4km,$ 其中 AF 是以 A 为顶点、 AD 为对称轴的抛物线段．试求该高科技工业园区的最大面积．



16．已知函数 $f(x)=ax-\ln x+1(a\in R)$， $g(x)=xe^{1-x}$.

（1）求函数 $g(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上的值域；

（2）是否存在实数 a，对任意给定的 $x_0\in(0,e]$，在区间 $[1,e]$ 上都存在两个不同的 $x_i(i=1,2)$，使得 $f(x_i)=g(x_0)$ 成立. 若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由；

江苏省仪征中学2018-2019学年第二学期期末复习讲义(4)
（教师版）

1、设i是虚数单位，复数$\dfrac{1+ai}{2+i}$为纯虚数，则实数a的值为________． -2

2.“$\log_3 M>\log_3 N$”是“$M>N$”成立的_________条件. 必要不充分

（从“充要”、“充分不必要”、“必要不充分”中选择一个正确的填写）

3.曲线$y=\dfrac{x}{x-2}$在点(1，－1)处的切线方程为 ______ $y=-2x+1$

4.若把英语单词“good”的字母顺序写错了，则可能出现的错误方法共有______________种。11

5.用数学归纳法证明等式$1+2+3+\cdots+(n+3)=\dfrac{(n+3)(n+4)}{2}(n\in \mathbf{N}^*)$ 时，第一步验证$n=1$时，

左边应取的项是___________． $1+2+3+4$

6．观察下列等式：

$$1=1$$

$$2+3+4=9$$

$$3+4+5+6+7=25$$

$$4+5+6+7+8+9+10=49$$

照此规律归纳第n（$n\in \mathbf{N}^*$）个等式，应为___________.

$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(3n-2)=(2n-1)^2$

7．定义在R上的奇函数$f(x)$满足：当$x>0$时，$f(x)=2^x+\log_2 x$，则方程$f(x)=0$的实根的个数为________．3

8. 设m为正整数，$\left(x+y\right)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，$\left(x+y\right)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b。若$13a=7b,$则$m=$___________．6

9．已知$f(x)=\ln(x^2-ax+2a-2)(a>0)$，若$f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数，则$a$的取值范围是__________________．$(-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})$

10. 已知$f\left(x\right)=a-\dfrac{1}{2^x-1}$是定义在$\left(-\infty,-1\right]\bigcup\left[1,+\infty\right)$上的奇函数，则$f\left(x\right)$的值域为______________. $\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$

11.设实数 $a \ge 1$，使得不等式 $x|x-a|+\frac{3}{2} \ge a$ ，对任意的实数 $x \in [1,2]$ 恒成立，则满足条件的实数 a 的范围是______．$[1,\frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2},+\infty)$

12.定义在R上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)+f'(x)>1, f(0)=4$，则不等式 $e^x f(x)>e^x+3$ 的解集是______________．$(0,+\infty)$

13．已知函数 $g(x)=ax^2-2ax+1+b,(a>0)$ 在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 4，最小值为 1，记 $f(x)=g(|x|)$．

（1）求实数 a、b 的值；

（2）若不等式 $f(\log_2 k)>f(\frac{1}{2})$ 成立，求实数 k 的取值范围；

解：（1） $g(x)=a(x-1)^2+1+b-a$，因为 $a>0$，所以 $g(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上是增函数，

故 $\begin{cases} g(2)=1 \\ g(3)=4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$.

（2）由已知可得 $f(x)=g(|x|)=x^2-2|x|+1$，为偶函数.

所以不等式 $f(\log_2 k)>f(\frac{1}{2})$，可化为 $0 \le |\log_2 k|<\frac{1}{2}$，或 $|\log_2 k|>\frac{3}{2}$

解得，$k \in (0,\frac{\sqrt{2}}{4}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2},+\infty)$.

14.设函数 $f(x)=\frac{-2^x+a}{2^{x+1}+b}(a>0,b>0)$.

（1）当 $a=b=2$ 时，证明：函数 $f(x)$ 不是奇函数；

（2）设函数 $f(x)$ 是奇函数，求 a 与 b 的值；

（3）在（2）条件下，证明函数 $f(x)$ 在 R 上单调递减，并求不等式 $f(x)>-\frac{1}{6}$ 的解集.

解：(1)当 $a=b=2$ 时，$f(x)=\frac{-2^x+2}{2^{x+1}+2}$ 所以 $f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(1)=0$，所以 $f(-1) \ne -f(1)$，所以函数 $f(x)$ 不是奇函数.　　　………3 分

（2）由函数 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(-x)=-f(x)$，即 $\frac{-2^{-x}+a}{2^{-x+1}+b}=-\frac{-2^x+a}{2^{x+1}+b}$ 对定义域内任意实数 x 都成立，化简整理得

$\left(2a-b\right)\cdot 2^{2x}+\left(2ab-4\right)\cdot 2^{x}+\left(2a-b\right)=0$ 对定义域内任意实数 x 都成立所以

$\begin{cases}2a-b=0\\2ab-4=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ 经检验 $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ 符合题意.　　………8 分

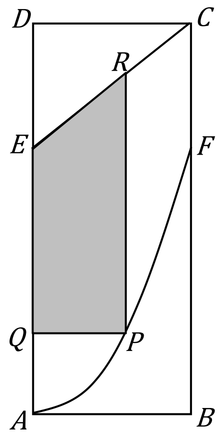
（3）由（2）可知 $f\left(x\right)=\dfrac{-2^{x}+1}{2^{x+1}+2}=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{2}{2^{x}+1}\right)$，

证明略（定义法或导数法）　　　　………12 分

由 $f\left(1\right)=-\dfrac{1}{6}$，不等式 $f\left(x\right)>-\dfrac{1}{6}$ 即为 $f\left(x\right)>f\left(1\right)$，由 $f\left(x\right)$ 在 R 上的减函数可得 $x<1$.

另解：由 $f\left(x\right)>-\dfrac{1}{6}$ 得，即 $\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{2}{2^{x}+1}\right)>-\dfrac{1}{6}$，解得 $2^{x}<2$，所以 $x<1$. ……15 分

15．某地政府为科技兴市，欲在如图所示的矩形 $ABCD$ 的非农业用地中规划出一个高科技工业园区（如图中阴影部分），形状为直角梯形 $QPRE$（线段 EQ 和 RP 为两个底边），已知 $AB=2km,BC=6km,AE=BF=4km,$ 其中 AF 是以 A 为顶点、AD 为对称轴的抛物线段．试求该高科技工业园区的最大面积.



解：以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系如图，则 $A(0,0),F(2,4)$，由题意可设抛物线段所在抛物线的方程为 $y=ax^2(a>0)$，由 $4=a\times 2^2$ 得，$a=1$，∴AF 所在抛物线的方程为 $y=x^2$，又 $E(0,4),C(2,6)$，∴EC 所在直线的方程为 $y=x+4$，设 $P(x,\ x^2)(0<x<2)$，则 $PQ=x,QE=4-x^2,PR=4+x-x^2$，

∴工业园区的面积 $S=\dfrac{1}{2}(4-x^2+4+x-x^2)\cdot x=-x^3+\dfrac{1}{2}x^2+4x\ (0<x<2)$，

∴ $S'=-3x^2+x+4,$ 令 $S'=0$ 得 $x=\dfrac{4}{3}$ 或 $x=-1$（舍去负值），

当 x 变化时，S' 和 S 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3},2)$
S'	+	0	-
S	↑	极大值 $\frac{104}{27}$	↓

由表格可知，当 $x=\dfrac{4}{3}$ 时，S 取得最大值 $\dfrac{104}{27}$．答：该高科技工业园区的最大面积 $\dfrac{104}{27}$．

16．已知函数 $f(x)=ax-\ln x+1(a\in R)$，$g(x)=xe^{1-x}$．

（1）求函数 $g(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上的值域；

（2）是否存在实数 a，对任意给定的 $x_0\in(0,e]$，在区间 $[1,e]$ 上都存在两个不同的 $x_i(i=1,2)$，使得 $f(x_i)=g(x_0)$ 成立.若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由；

18．解：(1)$\because g'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$ $\therefore g(x)$在区间$(0,1]$上单调递增，在区间$[1,e)$上单调递减,且$g(0)=0,g(1)=1,g(e)=e^{2-e}>0$ $\therefore g(x)$ 的值域为$(0,1]$

（2）令$m=g(x)$，则由(Ⅰ)可得$m\in(0,1]$，原问题等价于：对任意的$m\in(0,1]$ $f(x)=m$在$[1,e]$上总有两个不同的实根，故$f(x)$在$[1,e]$不可能是单调函数

$\because f'(x)=a-\dfrac{1}{x}(1\le x\le e)$ $\dfrac{1}{x}\in[\dfrac{1}{e},1]$

当$a\le 0$时，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}<0$，$\therefore f(x)$在区间$[1,e]$上递减，不合题意

当$a\ge 1$时，$f'(x)>0$, $f(x)$在区间$[1,e]$上单调递增，不合题意

当$0<a\le\dfrac{1}{e}$时，$f'(x)<0$, $f(x)$在区间$[1,e]$上单调递减，不合题意

当$1<\dfrac{1}{a}<e$即$\dfrac{1}{e}<a<1$时，$f(x)$在区间$[1,\dfrac{1}{a}]$上单调递减；$f(x)$在区间$[\dfrac{1}{a},e]$上单递增，

由上可得$a\in(\dfrac{1}{e},1)$，此时必有$f(x)$的最小值小于等于 0 而由

$f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{a})=2+\ln a\le 0$可得$a\le\dfrac{1}{e^2}$，则$a\in\Phi$

综上，满足条件的a不存在。