江苏省仪征中学2020届高三下学期数学周三限时训练1

数学 I

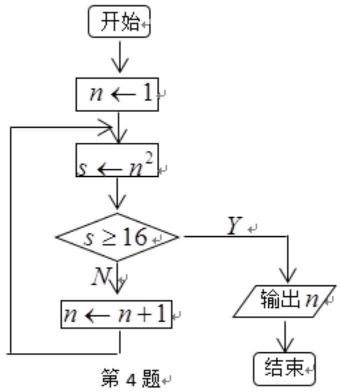
一、填空题：

1.已知集合 $A=\{0,1,-1\}$， $B=\left\{x\left|x^2-1\geq 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$______.

2.已知复数 z 满足 $z\cdot i=3-2i$，其中 i 是虚数单位，则 z 的共轭复数是______.

3.已知角 $510°$ 的终边经过点 $P\left(-\sqrt{3},a\right)$，则实数 a 的值是______.

4.如下图所示的流程图，输出 n 的值是______.



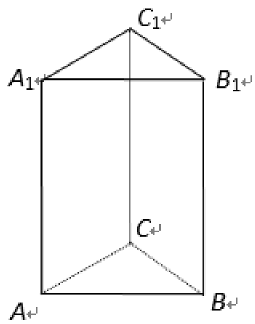
第 4 题

5.已知函数 $f\left(x\right)=x\left(a+3\sin x\right)$ 为偶函数，则实数 a 的值是______.

6.现有 5 根铁丝，长度（单位：cm）分别为 2.1，2.2，2.4，2.5，2.7，若从中一次随机抽取两根铁丝，则它们长度恰好相差 0.3cm 的概率是______.

7.已知单位向量 $\vec{a}$， $\vec{b}$ 的夹角为 $120°$，则 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$ 的值是______.

8.如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=\sqrt{3}$， $AA_1=4$，若点 P 从点 A 出发，沿着正三棱柱的表面，经过棱 A_1B_1 运动到点 C_1，则点 P 运动的最短路程为______.

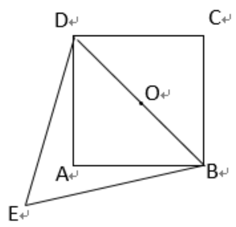


第 8 题

9.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $2a_4-a_2=6$，则 S_{11} 的值 $=$ ______.

10.已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a}{x-1}$（$a>0$），$g\left(x\right)=\left(x-1\right)^3$，若 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的图像交于 A、B 两个不同的点，点 P 在圆 C： $x^2+\left(y-1\right)^2=1$ 上运动，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 的取值范围是______.

11.如图，由一个正方形 $ABCD$ 与正三角形 BDE（点 E 在 BD 下方）组成一个“风筝骨架”，O 为正方形 $ABCD$ 的中心，点 P 是“风筝骨架”上一点，设 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$（$m$， $n\in R$），则 $m+n$ 的最大值是______.



第 11 题

12.已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），存在过左焦点 F 的直线与椭圆 C 交于 A、B 两点，满足 $\dfrac{AF}{BF}=2$，则椭圆 C 离心率的最小值是______.

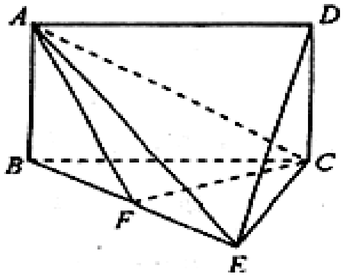
13.已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\left(-x+1\right),-1\le x\le t\\ -2\left|x-1\right|+1,t<x\le a\end{cases}$，若存在实数 t，使 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-1,1\right]$，则实数 a 的取值范围是______.

14.对任意 $x\in R$，不等式 $a\left(4^x+4^{-x}\right)+2b\left(2^x+2^{-x}\right)\le 3$ 恒成立，则 $a+b$ 的最大值是______.

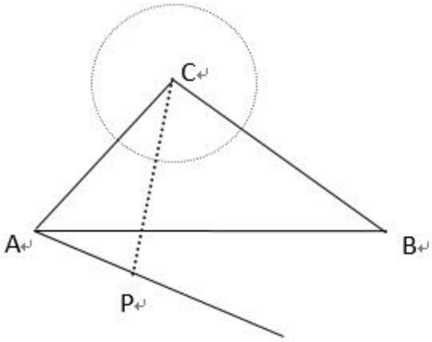
二、解答题：

15.（本小题满分 14 分）ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\sin B=\sqrt{5}\cos C$.
（1）求 $\tan C$ 的值；（2）若 $a=\sqrt{2}$，求 ΔABC 的面积.

16.（本小题满分14分）如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，平面 $ABCD\perp$ 平面 BCE，$BE\perp EC$.
（1）求证：平面 $AEC\perp$ 平面 ABE；
（2）点F在 BE 上，若 DE // 平面 ACF，求 $\dfrac{BE}{BF}$ 的值.



17.（本小题满分 14 分）某工厂 C 发生爆炸出现毒气泄漏，已知毒气以圆形向外扩散，且半径以每分钟 1km 的速度增大. 一所学校 A，位于工厂 C 南偏西 $45°$，且与工厂相距 5km .消防站 B 位于学校 A 的正东方向，且位于工厂 C 南偏东 $60°$，立即以每分钟 $\sqrt{2}\text{km}$ 的速度沿直线 BC 赶往工厂 C 救援，同时学校组织学生 P 从 A 处沿着南偏东 $75°$ 的道路，以每分钟 $a\text{km}$ 的速度进行安全疏散（与爆炸的时间差忽略不计）.要想在消防员赶往工厂的时间内（包括消防员到达工厂的时刻），保证学生的安全，学生撤离的速度应满足什么要求？

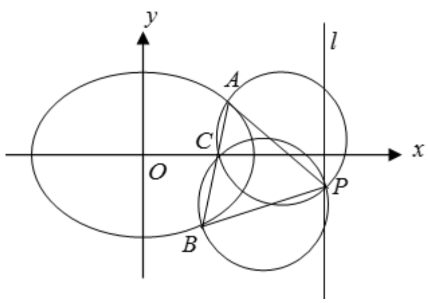


18.（本小题满分 16 分）如图所示，已知椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，右准线方程是直线 l：$x=4$，点 P 为直线 l 上的一个动点，过点 P 作椭圆的两条切线 PA、PB，切点分别为 A、B（点 A 在 x 轴上方，点 B 在 x 轴下方）.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）①求证：分别以 PA、PB 为直径的两圆都恒过定点 C；

②若 $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，求直线 PC 的方程.



19.（本小题满分 16 分）设函数 $f\left(x\right)=2x^2+a\ln x$，（$a\in R$）.

（1）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=2x+m$，求实数 a、m 的值；

（2）关于 x 的方程 $f\left(x\right)+2\cos x=5$ 能否有三个不同的实根？证明你的结论；

（3）若 $f\left(2x-1\right)+2>2f\left(x\right)$ 对任意 $x\in\left[2,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

20.（本小题满分 16 分）若无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_n>0$，且对任意 $s<k<l<n$，$s+n\geq k+l$（s，k，l，$n\in N^*$）都有 $a_5+a_n\geq a_k+a_l$，则称数列 $\left\{a_n\right\}$ 为"T"数列.

（1）证明：正项无穷等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 是"T"数列；

（2）记正项等比数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项之和为 S_n，若数列 $\left\{S_n\right\}$ 是"T"数列，求数列 $\left\{b_n\right\}$ 公比的取值范围；

（3）若数列 $\left\{c_n\right\}$ 是"T"数列，且数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项之和 T_n 满足 $\dfrac{T_n}{n}\geq\dfrac{c_1+c_n}{2}$，
求证：数列 $\left\{c_n\right\}$ 是等差数列.

江苏省仪征中学2020届高三下学期数学周三限时训练1

数学试题（II）卷

21A. [选修 4-2：矩阵与变换]已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -4\end{bmatrix}$.

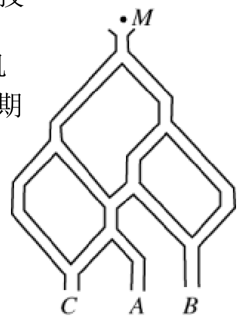
若矩阵 C 满足 $AC=B$，求矩阵 C 的特征值和相应的特征向量.

21B. [选修 4-4：坐标系与参数方程]已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho-4\cos\theta=0$，以极点为原点，极轴为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系，直线 l 过点 $M\left(3,0\right)$，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程与直线 l 的参数方程；

（2）设直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，求 $MA+MB$ 的值.

22. 如图，一个小球从M处投入，通过管道自上而下落入A或B或C.已知小球从每个岔口落入左右两个管道的可能性是相等的.某商家按上述投球方式进行促销活动，若投入的小球落到A，B，C，则分别设为一、二、三等奖.



（1）已知获得一、二、三等奖的折扣率分别为50%，70%，90%.记随机变量ξ为获得$k\left(k=1,2,3\right)$等奖的折扣率，求随机变量ξ的分布列及数学期望$E\left(\xi\right)$；

（2）若有 3 人（每人投入 1 球）参加促销活动，记随机变量η为获得一等奖或二等奖的人数，求$P\left(\eta=2\right)$.

23. 已知抛物线C：$y^2=4x$，过直线l：$x=-2$上任意一点A向抛物线C引两条切线AS，AT（切点为S，T，且点S在x轴上方）.

（1）求证：直线ST过定点，并求出该定点;（2）抛物线C上是否存在点B，使得$BS\perp BT$.

数学（I）卷参考答案　2019.04.19

1. $\{1,-1\}$　　2. $-2+3i$　　3. 1　　4. 4　　5. 0

6. $\dfrac{3}{10}$　　7. $\sqrt{7}$　　8. $\sqrt{31}$　　9. 66　　10. $\left[2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2\right]$

11. $\sqrt{3}$　　12. $\dfrac{1}{3}$　　13. $\left(\dfrac{1}{2},2\right]$　　14. $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{4}$

15. 解：（1）由 $\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 且 $A\in(0,\pi)$ 得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)$

又因为 $\sin B=\sqrt{5}\cos C$

所以 $\sin(A+C)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cos C+\dfrac{2}{3}\sin C=\sqrt{5}\cos C$

得 $\dfrac{2}{3}\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\cos C$

若 $\cos C=0$，则 $\sin C=1$ 不符合上式，所以 $\cos C\neq 0$

所以 $\tan C=\sqrt{5}$

（2）由 $\tan C=\sqrt{5}$，$\sin^2 C+\cos^2 C=1$ 且 $C\in(0,\pi)$

得 $\sin C=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，$\cos C=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\sin B=\sqrt{5}\cos C=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得 $b=\sqrt{3}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

16．证明：（1）矩形 $ABCD$ 中 $AB\perp BC$，平面 $ABCD\perp$ 平面 BCE，

平面 $ABCD\bigcap$ 平面 $BCE=BC$， $AB\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AB\perp$ 平面 BCE

又 $CE\subset$ 平面 BCE，$\therefore AB\perp CE$

而 $BE\perp EC$ 且 $AB\bigcap BE=B$， AB， $BE\subset$ 平面 ABE

$\therefore CE\perp$ 平面 ABE，

由 $CE\subset$ 平面 AEC，$\therefore$ 平面 $AEC\perp$ 平面 ABE

（2）连接 BD，设 $BD\bigcap AC=O$，连接 OF，

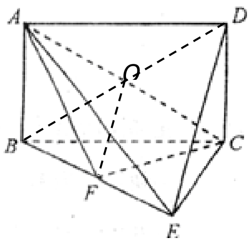
矩形 $ABCD$ 中，O 是 BD 中点

若 DE // 平面 ACF， $DE\subset$ 平面 DBE，平面 $DBE\bigcap$ 平面 $AFC=OF$

$\therefore OF$ // DE

在 ΔBDE 中，$\because OF$ // DE，O 是 BD 中点，$\therefore F$ 是 BE 中点

$\therefore \dfrac{BE}{BF}=2$



17. $BC=5\sqrt{2}$

因为安全撤离，所以 $PC>t$ 在 $t\in\left[0,5\right]$ 上恒成立

$PC^2=AC^2+AP^2-2AC\cdot AP\cos\angle CAP=25+a^2t^2-5at>t^2$ 在 $t\in[0,5]$ 上恒成立

所以 $f(t)=(a^2-1)t^2-5at+25>0$

$1°$ $a=1$ 时， $f(t)=-5t+25>0$ 在 $t\in[0,5]$ 上恒成立，所以 $a=1$ 符合题意

$2°$ $0<a<1$ 时， $f(t)$ 的最小值只可能在端点处取得，所以只要 $f(0)>0$ 且 $f(5)>0$，解得 $a<0$ 或 $a>1$，舍去

$3°$ $a>1$ 时

（1）当 $\frac{5a}{2(a^2-1)}\geq 5$ 即 $1<a<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ 时， $f(t)$ 的最小值为 $f(5)>0$，得 $a<0$ 或 $a<0$，所以 $1<a<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

（2）当 $\frac{5a}{2(a^2-1)}<5$ 即 $a>\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ 时， $\Delta<0$ 得 $a>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\frac{1+\sqrt{17}}{4}>\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 所以 $a>\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

综上， $a\geq 1$ 即学生撤离的速度至少要是每分钟1km

18.（1） $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）①设切点 $A(x_0,y_0)$，则可证切线 AP： $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$

所以点 $P\left(4,\frac{3(1-x_0)}{y_0}\right)$

以 AP 为直径的圆： $(x-x_0)(x-4)+(y-y_0)\left(y-\frac{3(1-x_0)}{y_0}\right)=0$

由对称性可知定点在 x 轴上，令 $y=0$ 得 $x^2-(4+x_0)x+3+x_0=0$，所以过定点 $C(1,0)$

同理，以 BP 为直径的圆过定点 $C\left(1,0\right)$

②设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$C\left(1,0\right)$

因为 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，所以 $\begin{cases} x_2=3-2x_1 \\ y_2=-2y_1 \end{cases}$

又因为 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1 \end{cases}$，所以 $A\left(\frac{7}{4},\frac{3\sqrt{5}}{8}\right)$

$P\left(4,-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$，所以直线 PC 的方程为 $y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19.（1）$a=-2$，$m=0$

（2）不可能有三个不同的实根，证明如下：

令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2\cos x$

如果 $g\left(x\right)=5$ 有三个不同的实根，则 $g\left(x\right)$ 至少要有三个单调区间，则 $g'\left(x\right)=0$ 至少两个不等实根，所以只要证明 $g'\left(x\right)=0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 至多 1 个实根

$g'\left(x\right)=4x+\frac{a}{x}-2\sin x$，$g''\left(x\right)=4x-2\cos x-\frac{a}{x^2}$，

1°当 $a<0$ 时，$4-2\cos x>0$，$-\frac{a}{x^2}>0$，$\therefore g''\left(x\right)>0$，$\therefore g'\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，

$\therefore g'\left(x\right)=0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 至多 1 个实根；

2°当 $a\geq 0$ 时，$\left(4x-2\sin x\right)'=4-2\cos x>0$，$\therefore y=4x-2\sin x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，

$\therefore y=4x-2\sin x>0$，又因为 $a\geq 0$ 时 $\frac{a}{x}\geq 0$，$\therefore g'\left(x\right)=4x+\frac{a}{x}-2\sin x>0$，

$\therefore g'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 没有实根

综合 1°2°可知，$g'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 至多 1 个实根，所以得证

（3）$\because f(2x-1)+2>2f(x)$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，且 $f(x)=2x^2+a\ln x$，

$\therefore 4x^2-8x+4+a\ln(2x-1)>2a\ln x$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore 4x^2-a\ln x^2>4(2x-1)-a\ln(2x-1)$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，

令 $h(t)=4t-a\ln t$，

则 $h(x^2)>h(2x-1)$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，

$\because x\in[2,+\infty)$ 时 $x^2>2x-1$，且 $h(x^2)>h(2x-1)$，$x^2\in[4,+\infty)$，$2x-1\in[3,+\infty)$

$\therefore h(t)=4t-a\ln t$ 在 $t\in[3,+\infty)$ 单调递增 $\therefore h'(t)=4-\dfrac{a}{t}\geq 0$ 在 $t\in[3,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore a\leq 12$

20.（1）证明：$a_s+a_n-a_k-a_l=(s+n-k-l)d$

因为正项无穷等差数列 $\{a_n\}$，所以 $d>0$，且 $s+n\geq k+l$，所以 $a_s+a_n\geq a_k+a_l$

所以正项无穷等差数列 $\{a_n\}$ 是“T”数列

（2）1° $q=1$ 时 $S_s+S_n-S_k-S_l=(s+n-k-l)a_1\geq 0$ 成立，所以 $q=1$；

2° $q>1$ 时 $S_s+S_n-S_k-S_l=\dfrac{a_1}{1-q}\left(q^k+q^l-q^n-q^s\right)=\dfrac{a_1}{1-q}q^s\left(q^{k-s}+q^{l-s}-q^{n-s}-1\right)$

因为 $s+n\geq k+l$，所以 $n\geq k+l-s$，又因为 $q>1$，所以 $q^{n-s}\geq q^{k+l-2s}=q^{k-s}\cdot q^{l-s}$

所以 $q^{k-s}+q^{l-s}-q^{n-s}-1\leq q^{k-s}+q^{l-s}-q^{k-s}\cdot q^{l-s}-1=\left(q^{k-s}-1\right)\left(1-q^{l-s}\right)<0$

所以$S_s+S_n-S_k-S_l=\dfrac{a_1}{1-q}q^s\left(q^{k-s}+q^{l-s}-q^{n-s}-1\right)>0$，所以$q>1$

3° $0<q<1$时

$$S_s+S_n-S_k-S_l=\frac{a_1}{1-q}\left(q^k+q^l-q^n-q^s\right)=\frac{a_1}{1-q}q^n\left(q^{k-n}+q^{l-n}-q^{s-n}-1\right)$$

$$=\frac{a_1}{1-q}q^n\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{n-k}+\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{q}\right)^{n-s}-1\right)$$

因为$s+n\ge k+l$，所以$n\ge k+l-s$，又因为$0<q<1$，所以$\left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-s}\ge\left(\dfrac{1}{q}\right)^{k-s}\cdot\left(\dfrac{1}{q}\right)^{l-s}$

所以

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{n-k}+\left(\frac{1}{q}\right)^{n-l}-\left(\frac{1}{q}\right)^{n-s}-1\le\left(\frac{1}{q}\right)^{s-k}\cdot\left(\frac{1}{q}\right)^{s-l}+1-\left(\frac{1}{q}\right)^{k-s}-\left(\frac{1}{q}\right)^{l-s}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{q}\right)^{k-s}-1\right]\left[\left(\frac{1}{q}\right)^{l-s}-1\right]<0$$

所以$S_s+S_n-S_k-S_l=\dfrac{a_1}{1-q}q^n\left(\left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-s}+1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-k}-\left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-l}\right)<0$ 舍去

综上：$q\ge1$

（3）$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$T_n=c_n+c_{n-1}+\cdots+c_1$

所以$2T_n=\left(c_1+c_n\right)+\left(c_2+c_{n-1}\right)+\cdots+\left(c_n+c_1\right)$

数列$\left\{c_n\right\}$是“T”数列，所以$c_2+c_{n-1}\le c_1+c_n$，$c_3+c_{n-2}\le c_1+c_n$，…，$c_n+c_1\le c_1+c_n$

所以$2T_n\le n\left(c_1+c_2\right)$，所以$\dfrac{T_n}{n}\le\dfrac{c_1+c_n}{2}$

又因为$\dfrac{T_n}{n} \ge \dfrac{c_1+c_n}{2}$，所以$\dfrac{T_n}{n} = \dfrac{c_1+c_n}{2}$，即$2T_n = n\left(c_1+c_n\right)$

两次退位相减，可证数列$\left\{c_n\right\}$是等差数列

21A. [选修 4-2：矩阵与变换]

解：设$C=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由$AC=B$，即$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$，

得$\begin{cases} a+c=0 \\ -c=1 \\ b+d=6 \\ -d=-4 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \\ d=4 \end{cases}$，所以$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

设$f\left(\lambda\right)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-4\right)+2=\lambda^2-5\lambda+6$，

令$f\left(\lambda\right)=0$，得$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$，

当$\lambda_1=2$时，$x-2y=0$，取$\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$；

当$\lambda_2=3$时，$2x-2y=0$，取$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

21B. 解：（1）对于C：由$\rho=4\cos\theta$，得$\rho^2=4\rho\cos\theta$，

$\therefore x^2+y^2=4x$.

对于 1：有$\begin{cases} x=3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$为参数）.

（2）设 A， B 两点对应的参数分别为 t_1， t_2 .

将直线 l 的参数方程代入圆 C 的直角坐标方程 $x^2+y^2-4x=0$，

得 $\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2+\frac{1}{4}t^2-4\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=0$，

化简得 $t^2+\sqrt{3}t-3=0$，

$\therefore t_1+t_2=-\sqrt{3}$， $t_1t_2=-3$，

$\therefore MA+MB=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{15}$.

22. 解：（1）随机变量 ξ 的可能取值为 50%， 70%， 90%，

其对应的概率分别为 $\frac{3}{16}$， $\frac{3}{8}$， $\frac{7}{16}$，

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	50%	70%	90%
P	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$

$\therefore E(\xi)=\frac{3}{16}\times 50\%+\frac{3}{8}\times 70\%+\frac{7}{16}\times 90\%=0.75$.

（2）投一次获得一等奖或二等奖的概率为 $\frac{9}{16}$，

则 $P(\eta=2)=C_3^2\times\left(\frac{9}{16}\right)^2\times\left(1-\frac{9}{16}\right)=\frac{1701}{4096}$.

23. 解：（1）设 $S(x_1,y_1)$， $T(x_2,y_2)$， $A(-2,t)$.

当 $y>0$ 时，$y=2\sqrt{x}$，则 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，

$\therefore$ 直线 AS 的方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}\left(x-x_1\right)$，

代入点 $A\left(-2,t\right)$ 得 $t-y_1=\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}\left(-2-x_1\right)$，

$\therefore \sqrt{x_1}t-\sqrt{x_1}y_1=-2-x_1$.

又 $y_1=2\sqrt{x_1}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}y_1t-2x_1=-2-x_1$，即 $x_1-\dfrac{1}{2}y_1t-2=0$，

同理可得 $x_2-\dfrac{1}{2}y_2t-2=0$，

$\therefore$ 直线 ST：$x-\dfrac{1}{2}ty-2=0$，

$\therefore$ 直线 ST 过定点 $\left(2,0\right)$.

（2）由（1）可知直线 ST 过定点 $\left(2,0\right)$，故可设 ST：$x=my+2$.

由 $\begin{cases}x=my+2\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4my-8=0$，

$\therefore y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$.

设点 $B\left(x_0,y_0\right)$. $\because BS\perp BT$，$\therefore \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BT}=0$，

$\therefore \left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)+\left(y_0-y_1\right)\left(y_0-y_2\right)=0$，

即 $x_0^2-\left(x_1+x_2\right)x_0+x_1x_2+y_0^2-\left(y_1+y_2\right)y_0+y_1y_2=0$.

$\because x_1x_2=\dfrac{1}{16}y_1^2y_2^2=4$， $x_1+x_2=m\left(y_1+y_2\right)+4=4m^2+4$，

$\therefore x_0^2-\left(4m^2+4\right)x_0+y_0^2-4my_0-4=0$.

又 $y_0^2=4x_0$，

$\therefore x_0^2-4m^2x_0-4my_0-4=0$，

$\therefore x_0^2=m^2y_0^2+4my_0+4=\left(my_0+2\right)^2$，

$\therefore x_0=my_0+2$ 或 $-x_0=my_0+2$，

$\because$ 点 B 不在直线 ST 上，

$\therefore \dfrac{1}{4}y_0^2+my_0+2=0$.

$\because \Delta=m^2-2$，

$\therefore$ 当 $m\le-\sqrt{2}$ 或 $m\ge\sqrt{2}$ 时，抛物线上存在点 B 满足条件；

当 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$ 时，抛物线上不存在点 B 满足条件.