

仪征市 2018-2019 学年度第二学期期中调研测试

高 二 数 学

分值：160 分，时间：120 分钟

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分. 请把答案填写在答题卡相应的位置上.

1、已知集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$ ， $B = \{x | 2 < x < 4\}$ ，则 $A \cup B =$ ▲.

2、命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 \leq 0$ 是 ▲ 命题(选填“真”或“假”).

3、计算： $\left(\frac{2}{3}\right)^0 + 3 \times \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + (\lg 4 + \lg 25) - 7^{\log_7 2}$ 的值为 ▲.

4、函数 $f(x) = \sqrt{1 - 2\log_6 x}$ 的定义域为 ▲.

5、 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{-1+3i}{1+2i}$ ，则 $|z+1| =$ ▲.

6、函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1}$ 的值域为 ▲.

7、“ $a=1$ ”是“函数 $f(x) = \frac{x+1}{x} + \sin x - a^2$ 为奇函数”的 ▲ 条件.(填“充分不必要”，“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”).

8、凸函数的性质定理为：如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是凸函数，则对于区间 D 内的任意 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，有 $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$ ，已知函数 $y = \sin x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上是凸函数，则在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值为 ▲.

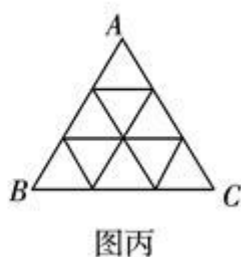
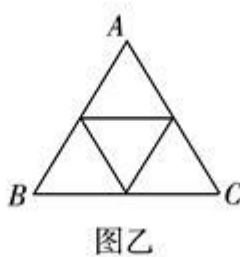
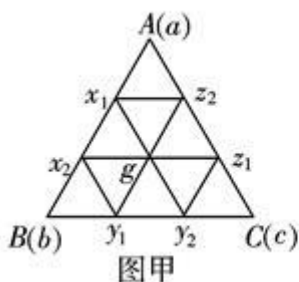
9、函数 $f(x) = x^3 - 3ax + b (a > 0)$ 的极大值为 6，极小值为 2，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ▲.

10、已知函数 $f(x) = \frac{\ln a + \ln x}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上为减函数，则 a 的取值范围为 ▲.

11、已知函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $x \in (0, 1)$ 时， $f(x) = 2^x - 1$ ，则 $f(\log_2 10)$ 的值为 ▲.

12、已知函数 $f(x) = |\log_2 x|$ ，正实数 m, n 满足 $m < n$, $f(m) = f(n)$ ，若 $f(x)$ 在区间 $[m^2, n]$ 上的最大值为 2，则 $m + n =$ ▲.

13、将正 $\triangle ABC$ 分割成 $n^2 (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$ 个全等的小正三角形(图乙，图丙分别给出了 $n = 2, 3$ 的情形)，在每个三角形的顶点各放置一个数，使位于 $\triangle ABC$ 的三边及平行于边的任一直线上的数(当数的个数不少于 3 时)都分别成等差数列，若顶点 A, B, C 处的三个数互不相同且和为 1，记所有顶点上的数之和为 $f(n)$ ，则有 $f(2) = 2, f(3) = \frac{10}{3}$ ，问 $f(4) =$ ▲.



14、已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x + \frac{1}{e}, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$ 若函数 $y = f(f(x) - a)$ 恰有四个零点，则实数 a 的取值范围是 ▲.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本小题满分 14 分)

设全集为实数集 R ， $A = \{x \mid 2x^2 - 7x + 3 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + a < 0\}$

(1) 当 $a = -4$ 时，求 $A \cap B$ ；

(2) 若 $(C_R A) \cap B = B$ ，求实数 a 的取值范围.

16、(本小题满分 14 分)

已知 $m \in R$ ，命题 P : 复数 $z = m - 2 + mi$ (i 是虚数单位) 在复平面内对应的点在第二象限，命题 Q : 复数 $z = m - 2 + mi$ 的模不大于 $\sqrt{10}$.

(1) 若 P 为真命题，求 m 的取值范围；

(2) 若命题 $(\neg P) \wedge Q$ 为真，求 m 的取值范围.

17、(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2mx + 2 - m$.

(1) 若不等式 $f(x) \geq x - mx$ 在 R 上恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2) 记 $A = \{y \mid y = f(x), 0 \leq x \leq 1\}$ ，且 $A \subseteq [0, +\infty)$ ，求实数 m 的最大值.

18、(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = 2^x + k \cdot 2^{-x}$ ($k \in R$) 是奇函数，

(1) 求 k 的值；

(2) 用单调性定义证明： $f(x)$ 在 R 上是单调增函数；

(3) 解关于 m 的不等式： $f(\ln m) + f(2 \ln m - 1) \leq 1 - 3 \ln m$.

19、(本小题满分 16 分)

为改善行人过解放路难的问题，仪征市政府决定在如图所示的矩形区域 $ABCD$ ($AB = 60$ 米， $AD = 104$ 米) 内修建一座过街天桥，天桥的高 GM 与 HN 均为 $4\sqrt{3}$ 米，

$\angle GEM = \angle HFN = \frac{\pi}{6}$ ， AE, EG, HF, FC 的造价均为每米 1 万元， GH 的造价为每米 2 万元，

设 MN 与 AB 所成的角为 α ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$)，天桥的总造价 (由 AE, EG, GH, HF, FC

五段构成， GM 与 HN 忽略不计) 为 W 万元.

- (1) 试用 α 表示 GH 的长；
- (2) 求 W 关于 α 的函数关系式；
- (3) 求 W 的最小值及相应的角 α .

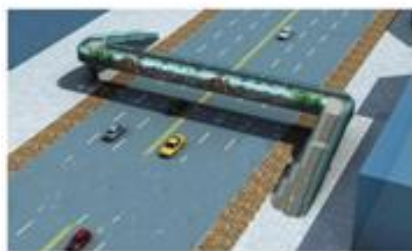


图 1

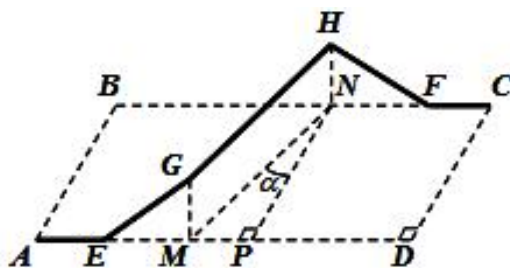


图 2

20、(本小题满分 16 分)

设 $k \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = \ln x - kx$.

- (1) 若 $k = 2$ ，求曲线 $y = f(x)$ 在 $P(1, -2)$ 处的切线方程；
- (2) 若函数 $f(x)$ 无零点，求实数 k 的取值范围；
- (3) 若函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 x_1, x_2 ，求证： $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.