

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期高三数学周练 9

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

1. 若集合 $A = \{x | (x-1)(x-6) > 0\}$, $B = \{x | 2-x > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{x | x > 6\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | 2 < x < 6\}$

2. 若 $z(1-2i) = 2+i$, 则复数 $z =$ ()

- A. -1 B. $-i$ C. 1 D. i

3. “ $a=0$ ”是“函数 $f(x) = \sin x + a \cos^2 x$ ”为奇函数的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 直线 $2x + (m+1)y + 4 = 0$ 与直线 $mx + 3y - 2 = 0$ 平行, 则 $m =$ ()

- A. 2 B. -3 C. 2 或 -3 D. -2 或 -3

5. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 称为黄金分割比例), 已知一位美女身高 154cm , 穿上高跟鞋后肚脐至鞋底的高度约 100cm , 若她穿上高跟鞋后达到黄金比例身材, 则她穿的高跟鞋约是 () (结果保留一位小数)

- A. 7.8cm B. 7.9cm C. 8.0cm D. 8.1cm

6. 已知函数 $f(x) = e^{-x} - e^x$ (e 为自然对数的底数), 若 $a = 0.7^{-0.5}$, $b = \log_{0.5} 0.7$, $c = \log_{0.7} 5$, 则 ()

- A. $f(b) < f(a) < f(c)$ B. $f(c) < f(b) < f(a)$ C. $f(c) < f(a) < f(b)$ D. $f(a) < f(b) < f(c)$

7. 已知向量 $\vec{a} = (-2, m)$, $\vec{b} = (1, -2)$, $\vec{c} = (m+1, 5)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} + \vec{c}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = (\ln x - 1)(x^2 + ax - 4)$, 若 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的值为 ()

- A. 3 B. $4e - \frac{1}{e}$ C. $\frac{4}{e} - e$ D. $e - \frac{4}{e}$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分：在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分）

9. 已知 α, β 是两个不同的平面, l, m 是两条不同的直线, 下列命题正确的是 ()

- A. 若 $l \perp \alpha, l \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$; B. 若 $l \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $l \parallel \beta$
C. 若 $l \parallel \alpha, l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$; D. 若 $l \perp m, m \perp \alpha$, 则 $l \parallel \alpha$

10. 在单位圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上任取一点 $P(x, y)$ ，圆 O 与 x 轴正向的交点是 A ，将 OA 绕原点 O 旋转到 OP 所成的角记为 θ ，若 x, y 关于 θ 的表达式分别为 $x = f(\theta), y = g(\theta)$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $x = f(\theta)$ 是偶函数， $y = g(\theta)$ 是奇函数；

B. $x = f(\theta)$ 在 $(0, \pi)$ 上为减函数， $y = g(\theta)$ 在 $(0, \pi)$ 上为增函数；

C. $f(\theta) + g(\theta) \geq 1$ 在 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立；

D. 函数 $t = 2f(\theta) + g(2\theta)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

11. 已知点 $A(-1, 0), B(1, 0)$ ，若圆 $(x - 2a + 1)^2 + (y - 2a - 2)^2 = 1$ 上存在点 M 满足 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3$ ，则实数 a 的值可以为（ ）

A. -2

B. -1

C. 3

D. 0

12. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + (m^2 - m)(e^{x-2} + e^{-x+2})$ (e 为自然对数的底数) 有唯一零点，则 m 的值可以为（ ）

A. 1

B. -1

C. 2

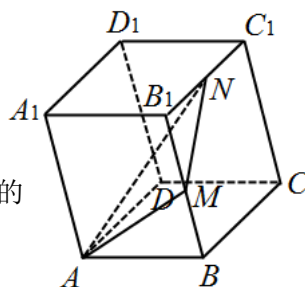
D. -2

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分，请把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 已知实数 x 满足 $\log_{0.5} x > 1$ ，则函数 $y = 8x + \frac{1}{2x-1}$ 的最大值为 ▲

14. 在四边形 $ABCD$ 中， $AB = 6$. 若 $\overrightarrow{DA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$ ▲

15. 如图，已知点 M, N 分别为平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1, B_1C_1 的中点，设 $\triangle AMN$ 的面积为 S_1 ，平面 AMN 截平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得截面面积为 S ，五棱锥 $A - BMNC_1C$ 的体积为 V_1 ，平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V ，则 $\frac{V_1}{V} =$ ▲ ， $\frac{S_1}{S} =$ ▲ .（本题第一空 2 分，第二空 3 分）



16. 意大利画家列奥纳多·达·芬奇（1452.4-1519.5）的画作《抱银貂的女人》中，女士脖颈上悬挂的黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽，达·芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数解析式

$f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ ，其中 a 为悬链线系数， $\cosh x$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，相应地双曲正弦函数的函数表达式为 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

若直线 $x = m (m < 0)$ 与双曲余弦函数 C_1 与双曲正弦函数 C_2 分别相交于点 A, B ，曲线 C_1 在点 A 处的切线 l_1 ，曲线 C_2 在点 B 处的切线 l_2 相交于点 P ，且 $\triangle PAB$ 为钝角三角形，则实数 m 的取值范围为 ▲ .



四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分.请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (本小题满分 10 分)

在① $\frac{b}{a} = \frac{\cos B + 1}{\sqrt{3} \sin A}$, ② $2\sin A = \sin B$, ③ $(a-c) \sin A = (A)B \sin B$ 这三个条件中任选一个,

补充在下面的横线上, 并加以解答.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 满足_____.

- (1) 求角 B ; (2) 若 $a + c = 2b$, 且 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 2, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OA} = (2\sin^2 x, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, -2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1)$, $f(x) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 1$

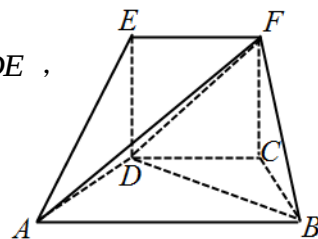
- (1) 求 $y = f(x)$ 的单调减区间;

- (2) 将 $f(x)$ 图象上各点的纵坐标不变, 横坐标扩大为原来的两倍, 再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 所得图象对应的函数为 $g(x)$, 且 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\beta \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right)$, $g(\alpha) = \frac{3}{5}$, $g(\beta) = -\frac{4}{5}$, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $EDCF$ 是正方形, $AD = DE$, $\angle ADE = 90^\circ$, $\angle ADC = \angle DCB = 120^\circ$

- (1) 证明: 平面 $ABCD \perp$ 平面 $EDCF$;
(2) 求直线 AF 与平面 BDF 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

2019 年年初, 山东省人民政府印发了《山东省新旧动能转换重大工程实施规划》, 全省上下解放思想, 真抓实干, 认真贯彻这一方案, 并取得了初步成效. 为了进一步了解新旧动能转换实施过程中存在的问题, 山东省有关部门随机抽取东部和西部两个地区的 200 个乡镇, 调查其 2019 年 3 月份的高科技企业投资额, 得到如下数据:

投资额/万元	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
乡镇数	20	36	44	50	40	10

将投资额不低于 70 万元的乡镇视为“优秀乡镇”, 投资额低于 70 万元的乡镇视为“非优秀乡镇”, 并将频率视为概率. 已知西部地区的甲乡镇参与了本次调查, 其高科技企业投资额为 35 万元.

	非优秀乡镇	优秀乡镇	合计
东部地区			
西部地区		20	110
合计			

(1) 请根据上述表格中的数据填写下面 2×2 列联表，并判断能否在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为“优秀乡镇”与其所在的地区有关.

(2) 经统计发现，这 200 个乡镇的高科技企业投资额 X (单位：万元) 近似地服从正态分布 $N(\mu, 190)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 (每组数据取该组区间的中点值作代表). 若 X 落在区间 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 外的左侧，则认为该乡镇为“资金缺乏型乡镇”.

① 试判断甲乡镇是否属于“资金缺乏型乡镇”；

② 某银行为本次参与调查的乡镇提供无息贷款支持，贷款方式为：投资额低于 μ 的每年给予两次贷款机会，投资额不低于 μ 的每年给一次贷款机会. 每次贷款金额 ξ 及对应的概率如下：

贷款金额 ξ / 万元	400	600	800
概率	0.2	0.5	0.3

求甲乡镇每年能够获得贷款总金额的数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$, $\sqrt{190} \approx 13.8$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.025	0.005
k_0	2.706	5.024	7.879

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y = x^2 - 6x + 1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 若圆 C 与直线 $x - y + a = 0$ 交于 A, B 两点，且 $OA \perp OB$ ，求 a 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{5}{2}x^2 + bx (a, b \in \mathbb{R})$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，且 $f(1) = f'(1) + \frac{11}{6}$.

(1) 求 a 的值；

(2) 设函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，求 b 的取值范围，并证明过两点 $P(x_1, f(x_1)) Q(x_2, f(x_2))$ 的直线 m 恒过定点，且求出该定点坐标；

(3) 当 $b > 1$ 时，证明函数 $g(x) = f(x) + 3x^2 - x - 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有一个零点.

答案

1~8 C D C C A D B C 9.AC 10.ACD 11.BD 12. BC

13. 0 14. 12 15. $\frac{7}{24}, \frac{1}{3}$ 16. $\left(-\infty, \frac{\ln(\sqrt{5}-2)}{2}\right)$

17.

【解析】选②

(1) 由 $2b \sin A = a \tan B$, 有 $2 \sin B \sin A = \sin A \tan B$ 得 $\cos B = \frac{1}{2}$

又 $0 < B < \pi$, 则 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 $R = 1$, 得 $b = 2R \sin B = \sqrt{3}$

故 $a + c = 2\sqrt{3}$, 由余弦定理有 $3 = a^2 + c^2 \tan C \cos B = (a + c)^2 - 3ac = 12 - 3ac \Rightarrow ac = 3$

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

叶庄亮数学

18.

【解析】(1) $f(x) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 1 = \frac{2 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1}{-2} + 1$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

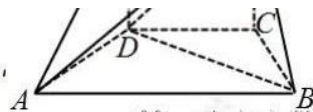
令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

所以 $f(x)$ 的单减区间为 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

(2) $-\frac{24}{25}$

19.

【解析】(1) 由四边形 $EDCF$ 为正方形, 则有 $ED \perp DC$, 又 $\angle ADE = 90^\circ$,



则有 $ED \perp DA$, 且 $DA \cap DC = D$, $DA, DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $ED \perp$ 平面 $ABCD$.

叶庄亮数学

又 $ED \subset$ 平面 $EDCF$, 所以平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 易知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, 且 $AD \perp DB$,

分别以 AD, DB, ED 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系

不妨设 $AD = DE = 1$, 则 $A(1, 0, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $F(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \text{ 即 } \vec{n} = (2, 0, 1) \\ z = 1, \end{cases}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AF} = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$$

$$\text{记 } AF \text{ 与平面 } BDF \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AF}| |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \times 2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

20. (1) 填写 2×2 列联表如下所示:

	非优秀乡镇	优秀乡镇	合计
东部地区	60	30	90
西部地区	90	20	110
合计	150	50	200

$$k^2 = \frac{200 \times (60 \times 20 - 30 \times 90)^2}{150 \times 50 \times 90 \times 110} = \frac{200}{33} \approx 6.061 > 5.024,$$

所以能在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为“优秀乡镇”与其所在的地区有关.

① 调查的 200 个乡镇的投资额频率分布表如下:

投资额/万元	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)
乡镇数	20	36	44	50	40	10
频率	0.1	0.18	0.22	0.25	0.2	0.05

$$\text{则 } \mu = 35 \times 0.1 + 45 \times 0.18 + 55 \times 0.22 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.2 + 85 \times 0.05 = 59.2,$$

因为 200 个乡镇的高科技企业投资额 X 近似地服从正态分布 $N(\mu, 190)$,

所以 $\sigma^2 = 190$, $\sigma \approx 13.8$, 所以 $n - 2\sigma \approx 59.2 - 27.6 = 31.6$,

因为甲乡镇的高科技企业投资额为 35 万元, 大于 31.6 万元,

所以甲乡镇不属于“资金缺乏型乡镇”.

②由小问 2-1 可知这 200 个乡镇的投资额的平均数为 59.2 万元, 甲乡镇的投资额为 35 万元, 低于 59.2 万元, 所以甲乡镇每年可以获得两次无息贷款, 所得贷款总金额 Y 的取值可以是 800, 1000, 1200, 1400, 1600,

$$P(Y=800) = 0.2 \times 0.2 = 0.04,$$

$$P(Y=1000) = 2 \times 0.2 \times 0.5 = 0.2,$$

$$P(Y=1200) = 0.5 \times 0.5 + 2 \times 0.2 \times 0.3 = 0.37,$$

$$P(Y=1400) = 2 \times 0.3 \times 0.5 = 0.3,$$

$$P(Y=1600) = 0.3 \times 0.3 = 0.09,$$

贷款总金额 Y 的分布列为

Y	800	1000	1200	1400	1600
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

$$E(Y) = 800 \times 0.04 + 1000 \times 0.2 + 1200 \times 0.37 + 1400 \times 0.3 + 1600 \times 0.09 = 1240 \text{ (元)}.$$

21. 【解析】(1) 曲线 $y = x^2 - 6x + 1$ 与 y 轴的交点为 $(0, 1)$, 与 x 轴的交点为

$(3 + 2\sqrt{2}, 0), (3 - 2\sqrt{2}, 0)$. 故可设 C 的圆心为 $(3, t)$, 则有 $3^2 + (t-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 + t^2$, 解得 $t = 1$. 则圆 C 的半径为 $\sqrt{3^2 + (t-1)^2} = 3$, 所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 其坐标满足方程组
$$\begin{cases} x - y + a = 0, \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9. \end{cases}$$

消去 y , 得方程 $2x^2 + (2a-8)x + a^2 - 2a + 1 = 0$.

由已知可得, 判别式 $\Delta = 56 - 16a - 4a^2 > 0$, 因此 $x_{1,2} = \frac{(8-2a) \pm \sqrt{56-16a-4a^2}}{4}$,

$$\text{从而 } x_1 + x_2 = 4 - a, \quad x_1 x_2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{2}. \quad \textcircled{1}$$

由于 $OA \perp OB$, 可得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

又 $y_1 = x_1 + a$, $y_2 = x_2 + a$ 所以 $2x_1x_2 + a(x_1 + x_2) + a^2 = 0$.

②

由①②得 $a = -1$, 满足 $\Delta > 0$, 故 $a = -1$.

22.

【解析】 (1) $f(1) = a + b - \frac{5}{2}$, $f'(x) = 3ax^2 - 5x + b$, $f'(1) = 3a + b - 5$

则 $a + b - \frac{5}{2} = 3a + b - 5 + \frac{11}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

(2) $f(x) = x^2 - 5x + b$

依题意可知 $\Delta_x = 25 - 4b > 0 \Rightarrow b < \frac{25}{4}$

易知此时 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = b$

叶庄亮数学

$$k_{PQ} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{3}(x_1^3 - x_2^3) - \frac{5}{2}(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) - \frac{5}{2}(x_1 + x_2) + b = -\frac{25}{6} + \frac{2}{3}b$$

则 $PQ: y = k_{PQ}(x - x_1) + f(x_1) = k_{PQ} \cdot x - \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) \cdot x_1 + \frac{5}{2}(x_1 + x_2) \cdot x_1 - bx_1 + f(x_1)$

$$= k_{PQ} \cdot x - \frac{1}{3}x_1x_2(x_1 + x_2) + \frac{5}{2}x_1x_2 = (-\frac{25}{6} + \frac{2}{3}b)x + \frac{5}{6}b$$

可知 PQ 过定点 $(-\frac{5}{4}, \frac{125}{24})$.

(3) 当 $b > 1$ 时, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + (b-1)x - 1$

即该 $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} + b - 1$ 只有一个零点

$$h'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}, h(x) \text{ 在 } (0, +\infty)$$

又有 $h(\frac{1}{b-1}) > 0$, $h(\frac{1}{1+b}) < 0$, 可知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有 1 个零点

而 $x < 0$ 时, $h(x) = \frac{(2x-1)(1+x)^2 - 2}{x} + b - 1 > 0$, 无零点

故可知 $h(x)$ 有唯一零点, 即 $g(x)$ 有唯一零点.

叶庄亮数学