

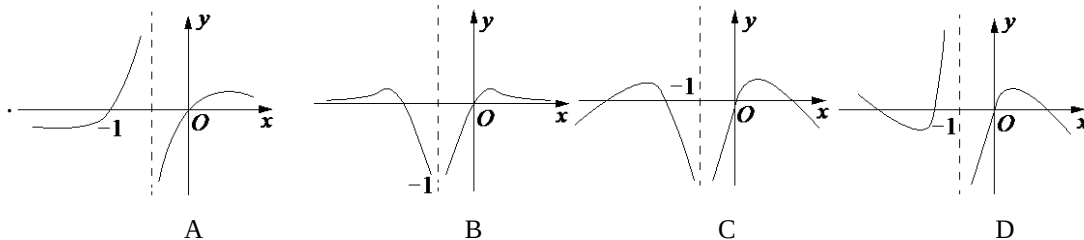
江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期高三数学综合练习 2

考试范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数

班级_____姓名_____学号_____评价_____

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 设集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | x - a > 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $\{a | a < -1\}$ B. $\{a | a \leq -1\}$ C. $\{a | a \leq 1\}$ D. $\{a | a > 1\}$
2. 设命题 $p: \exists x < 0, x^2 \leq 1$, 则 $\neg p$ 为 ()
 A. $\forall x \leq 0, x^2 < 1$ B. $\forall x < 0, x^2 < 1$ C. $\exists x \leq 0, x^2 < 1$ D. $\exists x < 0, x^2 < 1$
3. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x + 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集个数为 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 不等式 $x^2 - x + m > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立”的一个必要不充分条件是 ()
 A. $m > \frac{1}{4}$ B. $0 < m < 1$ C. $m > 0$ D. $m > 1$
5. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()
 A. $y = x^3$ B. $y = -x^2 + 1$ C. $y = \log_2 x$ D. $y = 2^{|x|}$
6. 设 $a = 0.3^{0.1}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, $c = \log_4 25$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()
 A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$
7. 函数 $f(x) = \frac{2\ln|x+1|}{(x+1)^2}$ 的大致图象为 ()



8. 若 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(0, 1)$ B. $(0, \frac{1}{3})$ C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$ D. $[\frac{1}{7}, 1)$

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

9. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | -3 \leq x < 4\}$, $N = \{x | x^2 - 2x - 8 \leq 0\}$, 则 ()
- A. $M \cup N = \{x | -3 \leq x < 4\}$ B. $M \cap N = \{x | -2 \leq x < 4\}$
 C. $(\complement_U M) \cup N = (-\infty, -3) \cup [-2, +\infty)$ D. $M \cap (\complement_U N) = [-3, -2)$

10. 下列四个命题中, 是真命题的是 ()
- A. $\forall x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 3x + 4 > 0$ B. $\forall x \in \{1, -1, 0\}, 2x + 1 > 0$
 C. $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 \leq x$ D. $\exists x \in \mathbf{N}^*, x$ 为 29 的约数

11. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 则 $f(x), g(x)$ 满足 ()
- A. $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$ B. $f(-2) < f(3), g(-2) < g(3)$
 C. $f(2x) = 2f(x) \cdot g(x)$ D. $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+2) = -f(x)$, 且函数 $f(x-1)$ 为奇函数, 则 ()
- A. 函数 $f(x)$ 是周期函数 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称
 C. 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 D. 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 已知 $p(x): x^2 + 2x - m > 0$, 若 $p \cap \emptyset$ 是假命题, $p(2)$ 是真命题, 则实数 m 的取值范围是_____.
14. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax + 2(a > 0)$, 若“ $\forall x_1 \in [-1, 2], \exists x_2 \in [0, 3]$, 使 $g(x_1) = f(x_2)$ ”是真命题, 则实数 a 的取值范围是_____.
15. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递减区间为_____.
16. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+2) = f(-x)$, 当 $0 < x \leq 1$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \log x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{1-x}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ 则 } f\left(-\frac{9}{4}\right) + f(11) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 已知 p : 实数 x 满足 $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$, q : 实数 x 满足 $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = 1 + a\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $f(x) \geq -3$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

19. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \log_a(x+1)$, $g(x) = \log_a \frac{1}{1-x}$, 记 $F(x) = 2f(x) + g(x)$.

(1) 求函数 $F(x)$ 的定义域及其零点;

(2) 若关于 x 的方程 $F(x) - m = 0$ 在区间 $[0, 1)$ 内有解, 求实数 m 的取值范围.

20. 已知 $f(\log_3 x) = x^2 - 2x + 4$, $x \in [\frac{1}{3}, 3]$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及定义域;

(2) 求 $f(x)$ 的值域;

(3) 若方程 $f(x) = a^2 - 3a + 3$ 有实数根, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, 都有 $f(a+b) = f(a) + f(b) - 1$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, $f(4) = 5$.

(1) 求 $f(2)$ 的值;

(2) 求证: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;

(3) 解不等式 $f(3m^2) + f(-m-2) - 1 < 3$.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{2a^x - 4 + a}{2a^x + a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(3) 当 $x \in [1, 2]$ 时, $2 + mf(x) - 2^x > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 设集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | x - a > 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{a | a < -1\}$ B. $\{a | a \leq -1\}$ C. $\{a | a \leq 1\}$ D. $\{a | a > 1\}$

B【解析】由题意得集合 $B = \{x | x > a\}$. 若 $A \subseteq B$, 则只需 $a \leq -1$, 即实数 a 的取值范围是 $\{a | a \leq -1\}$. 故选 B.

2. 设命题 $p: \exists x < 0, x^2 \leq 1$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x \leq 0, x^2 < 1$ B. $\forall x < 0, x^2 < 1$ C. $\exists x \leq 0, x^2 < 1$ D. $\exists x < 0, x^2 < 1$

$\exists x < 0, x^2 < 1$

B【解析】特称命题的否定是全称命题, $\therefore \neg p: \forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 < 1$. 故选 B.

3. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x + 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

D【解析】法一: 结合直线 $y = x + 1$ 与抛物线 $y = x^2$ 的图像可知, 它们有 2 个交点, 故集合 $A \cap B$ 有 2 个元素, 可知其子集共有 $2^2 = 4$ 个. 故选 D.

法二: 由 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ ①, $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$, $\therefore$ 方程①有两个不相等的实数根, $\therefore$ 方程组有两组解, 即直线 $y = x + 1$ 与抛物线 $y = x^2$ 有 2 个交点, 故集合 $A \cap B$ 有 2 个元素, 可知其子集共有 $2^2 = 4$ 个. 故选 D.

4. 不等式 $x^2 - x + m > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立”的一个必要不充分条件是 ()

- A. $m > \frac{1}{4}$ B. $0 < m < 1$ C. $m > 0$ D. $m > 1$

C【解析】不等式 $x^2 - x + m > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 $\Delta = 1 - 4m < 0$, $\therefore m > \frac{1}{4}$. 结合选项可知, 其中一个必要不充分条件为 $m > 0$. 故选 C.

5. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = x^3$ B. $y = -x^2 + 1$ C. $y = \log_2 x$ D. $y = 2^{|x|}$

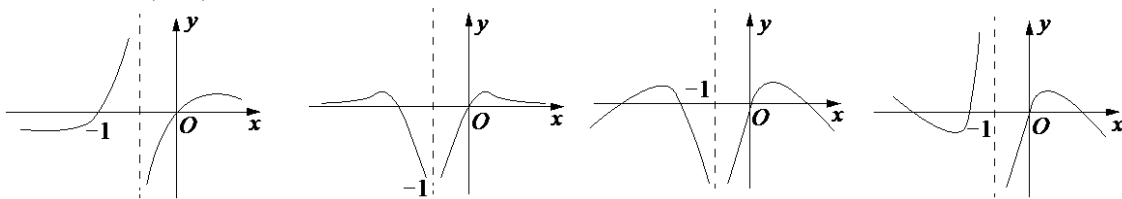
D【解析】由偶函数的定义: $(-x)^3 = -x^3 \neq x^3$, 故 A 错误; $y = -x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, 故 B 错误; $y = \log_2 x$ 不是奇函数也不是偶函数, 故 C 错误; 显然 $2^{|-x|} = 2^{|x|}$, 故该函数是偶函数, 当 $x > 0$ 时, $y = 2^x$ 是增函数, 故 D 正确. 故选 D.

6. 设 $a = 0.3^{0.1}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, $c = \log_4 25$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

D【解析】因为 $0 < a = 0.3^{0.1} < 0.3 = \frac{1}{3}$, $1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} < b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5 < \log_3 9 = 2$, $c = \log_4 25 > \log_4 4^2 = 2$, $\therefore c > b > a$. 故选 D.

7. 函数 $f(x) = \frac{2 \ln |x+1|}{(x+1)^2}$ 的大致图象为 ()



B 【解析】要使函数有意义，则 $x+1 \neq 0$ ，得 $x \neq -1$ ， $f(x-1) = \frac{2\ln|x|}{x^2}$ 是偶函数，则 $f(x-1)$ 关于 y 轴对称，则 $f(x)$ 关于 $x=-1$ 对称，排除 A，D，当 $x \rightarrow +\infty$ ， $f(x) > 0$ ，排除 C。故选 B。

8. 若 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则实数 a 的取值范围是

()

A. $(0, 1)$

B. $(0, \frac{1}{3})$

C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$

D. $[\frac{1}{7}, 1)$

C 【解析】 $\because f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数， $\therefore \begin{cases} 3a-1 < 0 \\ 0 < a < 1 \\ (3a-1) \times 1 + 4a \geq \log_a 1 = 0 \end{cases}$ ，解得 $\frac{1}{7} \leq a < \frac{1}{3}$ ，即实数 a 的取值范围为 $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$ 。故选 C。

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

9. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $M = \{x | -3, x < 4\}$ ， $N = \{x | x^2 - 2x - 8 \leq 0\}$ ，则 ()

A. $M \cup N = \{x | -3, x < 4\}$

B. $M \cap N = \{x | -2, x < 4\}$

C. $(\complement_U M) \cup N = (-\infty, -3) \cup [-2, +\infty)$

D. $M \cap (\complement_U N) = [-3, -2)$

BCD 【解析】由 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ ，得 $-2 \leq x \leq 4$ ，所以 $N = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$ ，则 $M \cup N = \{x | -3 \leq x \leq 4\}$ ，A 错误； $M \cap N = \{x | -2 \leq x < 4\}$ ，B 正确；由于 $\complement_U M = (-\infty, -3) \cup [4, +\infty)$ ，故 $(\complement_U M) \cup N = (-\infty, -3) \cup [-2, +\infty)$ ，C 正确；由于 $\complement_U N = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ ，故 $M \cap (\complement_U N) = [-3, -2)$ ，D 正确。故选 BCD。

10. 下列四个命题中，是真命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 3x + 4 > 0$

B. $\forall x \in \{1, -1, 0\}, 2x + 1 > 0$

C. $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 \leq x$

D. $\exists x \in \mathbf{N}^*, x$ 为 29 的约数

ACD 【解析】对于选项 A，因为 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4 < 0$ ， $2 > 0$ ，所以 $2x^2 - 3x + 4 > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，故 A 为真命题；对于选项 B，当 $x = -1$ 时， $2x + 1 > 0$ 不成立，故 B 为假命题；对于选项 C，当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 时， $x^2 \leq x$ 成立，故 C 为真命题；对于选项 D，当 $x = 1$ 时， x 为 29 的约数成立，故 D 为真命题。故选 ACD。

11. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ， $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，则 $f(x)$ ， $g(x)$ 满足 ()

A. $f(-x) = -f(x)$ ， $g(-x) = g(x)$

B. $f(-2) < f(3)$ ， $g(-2) < g(3)$

C. $f(2x) = 2f(x) \cdot g(x)$

D. $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

ABC 【解析】 $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$ ， $g(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = g(x)$ ，故 A 正确； $f(x)$ 为增函数，则 $f(-2) < f(3)$ ，

$g(-2) = \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$ ， $g(3) = \frac{e^3 + e^{-3}}{2}$ ，易得 $g(3) > g(-2)$ ，故 B 正

确； $2f(x) \cdot g(x) = 2 \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \times \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} = f(2x)$ ，

故 C 正确； $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = [f(x) + g(x)] \cdot [f(x) - g(x)] = e^x \cdot$

$(-e^{-x}) = -1$ ，故 D 错误. 故选 ABC.

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+2) = -f(x)$ ，且函数 $f(x-1)$ 为奇函数，则
()

- A. 函数 $f(x)$ 是周期函数
- B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称
- C. 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数
- D. 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数

ABC【解析】 $\because f(x+2) = -f(x)$ ， $\therefore f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，故 $f(x)$ 是周期函数，A 正确； $\because$ 函数 $f(x-1)$ 为奇函数， $\therefore$ 函数 $f(x-1)$ 的图象关于原点中心对称， $\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称，B 正确； $\because$ 函数 $f(x-1)$ 为奇函数， $\therefore f(-x-1) = -f(x-1)$ ，又 $f(x+2) = -f(x)$ ， $f(x+1) = -f(x-1)$ ， $\therefore f(x+1) = f(-x-1)$ ， $f(-x) = f(x)$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，C 正确； $\because$ 函数 $f(x-1)$ 为奇函数， $\therefore f(-1) = 0$ ，又函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数， $\therefore f(1) = 0$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)$ 不单调，D 错误. 故选 ABC

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13 已知 $p(x): x^2 + 2x - m > 0$ ，若 $p(1)$ 是假命题， $p(2)$ 是真命题，则实数 m 的取值范围是_____.

[3, 8)【解析】 由 $p(1)$ 是假命题， $p(2)$ 是真命题，得 $\begin{cases} 1+2-m \leq 0 \\ 4+4-m > 0 \end{cases}$ ，解得 $3 \leq m < 8$. 故 m 的取值范围是 $[3, 8)$.

14. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x$ ， $g(x) = ax + 2(a > 0)$ ，若“ $\forall x_1 \in [-1, 2]$ ， $\exists x_2 \in [0, 3]$ ，使 $g(x_1) = f(x_2)$ ”是真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

(0, $\frac{1}{2}$)【解析】 由于函数 $g(x)$ 在定义域 $[-1, 2]$ 内是任意取值的，且必存在 $x_2 \in [0, 3]$ ，使得 $g(x_1) = f(x_2)$ ，因此问题等价于函数 $g(x)$ 的值域是函数 $f(x)$ 值域的子集. 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-1, 3]$ ，函数 $g(x)$ 的值域是 $[2-a, 2+2a]$ ，则有 $2-a \leq -1$ 且 $2+2a \leq 3$ ，即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 且 $a \leq \frac{1}{4}$. 又 $a > 0$ ，故 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4}]$.

15. 函数 $f(x) = \log_1(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递减区间为_____.

(3, $+\infty$)【解析】 令 $u = x^2 - 2x - 3$ ，则 $f(x) = \log_1 u$ 为复合函数，由 $x^2 - 2x - 3 > 0$ ，解得 $x < -1$ 或 $x > 3$ ，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ ，根据同增异减法则和二次函数的单调性，得 $f(x)$ 的递减区间为 $(3, +\infty)$.

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数， $\forall x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x+2) = f(-x)$ ，当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} 3 - \log_2 x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{1-x}, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$ ，

则 $f(-\frac{9}{4}) + f(11) =$ _____.

【解析】 由题知，函数 $f(x)$ 为偶函数且周期为 2， $\therefore f(-\frac{9}{4}) + f(11) = f(\frac{9}{4}) + f(1) = 5 + 0 = 5$.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. 已知 p : 实数 x 满足 $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$ ， q : 实数 x 满足 $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

1.【解析】 由 $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$ ，得 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ，

故 p 对应的集合是 $M = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ ，.....2 分

由 $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) = 0$, 得 $a \leq x \leq a+1$,
故 q 对应的集合是 $N = \{x | a \leq x \leq a+1\}$ 4 分

则 $\neg p$ 对应的集合为 $A = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < \frac{1}{2}\}$,

$\neg q$ 对应的集合为 $B = \{x | x > a+1 \text{ 或 } x < a\}$ 5 分

$Q \rightarrow p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 即集合 $B \cup A$ 7 分

$\therefore \begin{cases} a+1 > 1 \\ a \geq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a+1 \leq 1 \\ a < \frac{1}{2} \end{cases}$, 解得 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 或 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 9 分

综上可得, 实数 a 的取值范围是 $[0, \frac{1}{2}]$ 10 分

18 已知函数 $f(x) = 1 + a\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x$. (1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $f(x) \geq -3$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, 由指数函数、复合函数单调性知 $f(x)$ 在 R 上为减函数, $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, 即 $f(x)$ 的值域为 $(1, +\infty)$;

(2) 由题意知, 令 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$, 则 $t \in (0, 1]$, 依题意可得 $1 + at + t^2 \geq -3$,

即 $t + \frac{4}{t} + a \geq 0$ 对任意 $t \in (0, 1]$ 恒成立, 由函数 $h(t) = t + \frac{4}{t} + a$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减,

故 $t = 1$, $h(t)_{\min} = 5 + a \geq 0$, $a \geq -5$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[-5, +\infty)$.

19. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \log_a(x+1)$, $g(x) = \log_a \frac{1}{1-x}$, 记 $F(x) = 2f(x) + g(x)$.

(1) 求函数 $F(x)$ 的定义域及其零点;

(2) 若关于 x 的方程 $F(x) - m = 0$ 在区间 $[0, 1)$ 内有解, 求实数 m 的取值范围.

【答案】解: (1) $F(x) = 2f(x) + g(x) = 2\log_a(x+1) + \log_a \frac{1}{1-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

由 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$, 可解得 $-1 < x < 1$, 所以函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$,

令 $F(x) = 0$, 则 $2\log_a(x+1) + \log_a \frac{1}{1-x} = 0 \dots (*)$, 方程变为 $\log_a(x+1)^2 = \log_a(1-x)$,

即 $(x+1)^2 = 1-x$, 即 $x^2 + 3x = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = -3$,

经检验 $x = -3$ 是 $(*)$ 的增根, 所以方程 $(*)$ 的解为 $x = 0$, 即函数 $F(x)$ 的零点为 0.

(2) 方程可化为 $m = 2\log_a(x+1) + \log_a \frac{1}{1-x} = \log_a \frac{x^2+2x+1}{1-x} = \log_a(1-x + \frac{4}{1-x} - 4)$,

故 $a^m = 1-x + \frac{4}{1-x} - 4$, $x \in [0, 1)$, 设 $1-x = t \in (0, 1]$, 函数 $y = t + \frac{4}{t}$ 在区间 $(0, 1]$ 上是减函数,

当 $t = 1$ 时, $x = 0$, $y_{\min} = 5$, 所以 $a^m \geq 1$,

① 若 $a > 1$, 由 $a^m \geq 1$ 可解得 $m \geq 0$, ② 若 $0 < a < 1$, 由 $a^m \geq 1$ 可解得 $m \leq 0$,

故当 $a > 1$ 时，实数 m 的取值范围为： $m \geq 0$ ，
 当 $0 < a < 1$ 时，实数 m 的取值范围为： $m \leq 0$ 。

20. 已知 $f(\log_3 x) = x^2 - 2x + 4$, $x \in [\frac{1}{3}, 3]$. (1)求 $f(x)$ 的解析式及定义域； (2)求 $f(x)$ 的值域；
 (3)若方程 $f(x) = a^2 - 3a + 3$ 有实数根，求实数 a 的取值范围。

【答案】解：(1)设 $t = \log_3 x$ ，因为 $x \in [\frac{1}{3}, 3]$ ，所以 $t \in [-1, 1]$ ，并且 $x = 3^t$ ，
 所以 $f(t) = (3^t)^2 - 2 \times 3^t + 4$ ，所以 $f(x) = (3^x)^2 - 2 \times 3^x + 4$, $x \in [-1, 1]$ ；
 (2)设 $u = 3^x$ ， $u \in [\frac{1}{3}, 3]$ ， $f(u) = u^2 - 2u + 4 = (u - 1)^2 + 3$, $\therefore f(u) \in [3, 7]$
 即所求值域为 $[3, 7]$ ；
 (2)设 $u = 3^x$ ， $u \in [\frac{1}{3}, 3]$ ， $f(u) = u^2 - 2u + 4 = (u - 1)^2 + 3$ ，所以 $f(u) = [3, 7]$ ，
 所以 $a^2 - 3a + 3 \in [3, 7]$ ，所以 $a \in [-1, 0] \cup [3, 4]$ 。

21. 21. 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(a+b) = f(a) + f(b) - 1$ ，且当 $x > 0$ 时， $f(x) > 1$ ， $f(4) = 5$.
 (1) 求 $f(2)$ 的值；
 (2) 求证： $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数；
 (3) 解不等式 $f(3m^2) + f(-m-2) - 1 < 3$ 。

【解析】(1) $\because f(a+b) = f(a) + f(b) - 1$ ，
 $\therefore f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) - 1 = 5$ ，
 $\therefore f(2) = 3$
 (2) 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $x_2 - x_1 > 0$ ，
 $\therefore f(x_2 - x_1) > 1$.
 $\because f(x_2) = f[x_1 + (x_2 - x_1)] = f(x_1) + f(x_2 - x_1) - 1 > f(x_1)$ ，
 即 $f(x_2) > f(x_1)$ ，
 $\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.....
 (3) $\because f(a+b) = f(a) + f(b) - 1$ 及 $f(2) = 3$ ，
 $\therefore f(3m^2) + f(-m-2) - 1 < 3$ 可以转化为 $f(3m^2 - m - 2) < f(2)$ 。

.....
 由(2)知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，
 $\therefore 3m^2 - m - 2 < 2$ ，即 $3m^2 - m - 4 < 0$ ，
 解得 $-1 < m < \frac{4}{3}$ ，

故原不等式的解集为
 $\{m | -1 < m < \frac{4}{3}\}$

22、已知函数 $f(x) = \frac{2a^x - 4 + a}{2a^x + a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. (1)求 a 的值; (2)求函数 $f(x)$ 的值域; (3)当 $x \in [1, 2]$ 时, $2 + mf(x) - 2^x > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】解: (1)因为函数为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 且 $f(0) = 0$, 即 $\frac{2^{-4+a}}{2+a} = 0$, 解得 $a = 2$;

又当 $a = 2$ 时, $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 定义域为 $\mathbf{R}$ 且 $f(-x) = -f(x)$ 符合题意, 综上所述, $a = 2$.

(2)由(1)得 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$,

$2^x + 1 > 1$, 则 $0 < \frac{1}{2^x + 1} < 1$, 所以 $0 < \frac{2}{2^x + 1} < 2$, 所以 $-2 < -\frac{2}{2^x + 1} < 0$,

所以 $-1 < 1 - \frac{2}{2^x + 1} < 1$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$;

(3)由题意 $x \in [1, 2]$ 时, 由(2)可知函数为单调递增函数, 所以 $0 < \frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{3}{5}$,

所以 $m > \frac{(2^x + 1)(2^x - 2)}{2^x - 1}$ 恒成立, 又设 $2^x - 1 = t$, 则 $t \in [1, 3]$, $m > \frac{(t+2)(t-1)}{t} = t - \frac{2}{t} + 1$ 恒成立,

因为函数 $y = t - \frac{2}{t} + 1$ 在 $[1, 3]$ 上为增函数, 所以 $\left(t - \frac{2}{t} + 1\right)_{\max} = 3 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{10}{3}$,

所以实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$.