

数列求和的常用方法：

(1) 公式法：(1) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n - 1$ ，则 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = \underline{\quad\quad}$ (答： $\frac{4^n - 1}{3}$)；)

(2) 分组求和法： $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - \cdots + (-1)^n(2n-1)$ (答： $(-1)^n \cdot n$)

(3) 倒序相加：(1) 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{4}) = \underline{\quad\quad}$
(答： $\frac{7}{2}$)

(4) 错位相减法：(1) 设 $\{a_n\}$ 为等比数列， $T_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$ ，已知 $T_1 = 1$ ， $T_2 = 4$ ，
①求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比；②求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式。(答：① $a_1 = 1$ ， $q = 2$ ；② $T_n = 2^{n+1} - n - 2$)；

(5) 裂项相消法：(1) 求和： $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2) \times (3n+1)} = \underline{\quad\quad}$ (答： $\frac{n}{3n+1}$)；

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ ，且 $S_n = 9$ ，则 $n = \underline{\quad\quad}$ (答：99)；

(6) 通项转换法：求和： $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \underline{\quad\quad}$ (答： $\frac{2n}{n+1}$)

数列通项公式的常见求法：

①观察法 (通过观察数列前几项与项数之间的关系归纳出第 n 项 a_n 与项数 n 之间的关系) .

②公式法 (利用等差、等比数列的通项公式或利用 $a_n = \begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$ 直接写出所求数列的通项公式) .

③叠加法 (适用递推关系为 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 型)，

④迭乘法 (适用递推关系为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ 型)

⑤构造新数列法 (如递推关系 $a_{n+1} = pa_n + q$ ； $a_{n+1} = pa_n + b_n$ (b_n 为等差数列或等比数列) 型)

⑥ 由 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，求数列通项时注意到 $n \geq 2$ 了吗？一般情况是： $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} T_1, & n=1 \\ \frac{T_n}{T_{n-1}}, & n \geq 2 \end{cases}$