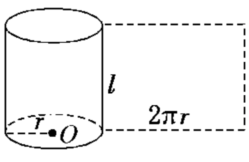
空间几何体的表面积与体积

一、【知识梳理】

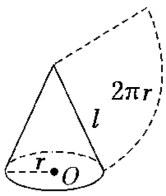
1．多面体的面积和体积公式

名称		侧面积($S_{侧}$)	全面积($S_{全}$)	体　积(V)
棱柱	棱柱	各侧面的面积和	侧面积＋2×上底面积	V＝底面积×高
	直棱柱	底面周长×侧棱长		
棱锥	棱锥	各侧面积之和	侧面积＋底面积	$V=\frac{1}{3}\times$底面积×高
	正棱锥	$\frac{1}{2}\times n$边长×斜高		
棱台	棱台	各侧面面积之和	侧面积＋上底面积＋下底面积	$V=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')\times$高
	正棱台	$\frac{1}{2}\times n$(上底边长＋下底边长)×斜高		

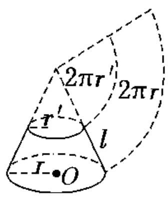
2．圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式



$S_{圆柱侧}=2\pi rl$



$S_{圆锥侧}=\pi rl$



$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l$

3.旋转体的表面积和体积公式

$S_{球}=4\pi R^2$　　$V_{圆柱}=\pi r^2h$　　$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$

$V_{圆台}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$　　$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

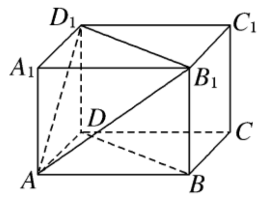
二、【典例分析】

题型一　公式法求解几何体的表面积、体积

例题 1

(1)若一个圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆面，则该圆锥的体积为________.

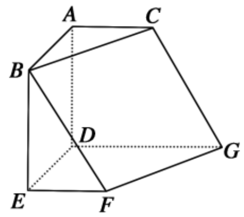
(2)如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=3\text{cm}$，$AA_1=2\text{cm}$，则四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的体积为________cm^3.



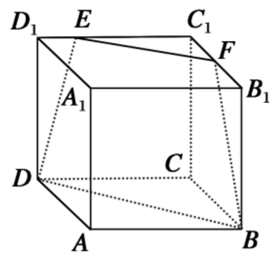
题型二　利用割补法求几何体的体积

例题 2

(1)如图所示，已知多面体 $ABCDEFG$ 中，AB，AC，AD 两两互相垂直，平面 ABC // 平面 $DEFG$，平面 BEF // 平面 $ADGC$，$AB=AD=DG=2$，$AC=EF=1$，则该多面体的体积为________.



(2)如图，在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别在 C_1D_1 与 C_1B_1 上，且 $C_1E=4$，$C_1F=3$，连接 EF，FB，DE，则几何体 EFC_1-DBC 的体积为(　　)



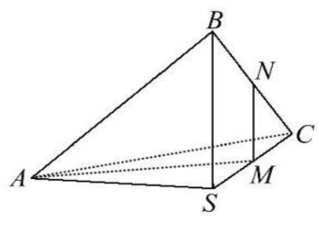
A.66　　　B. 68　　　C.70　　　D .72

题型三　多面体与球的切、接问题

例题 3

(1)设 P，A, B, C 是球 O 表面上的四个点，PA，PB，PC 两两垂直，且 PA=PB=PC=1m,则球的表面积为________，体积为________.

(2)在正三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N 分别是 SC，BC 的中点，且 $MN\perp AM$，若侧棱 $SA=2\sqrt{3}$，则正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是(　　)



A．12　　　B．32π　　　C．36π　　　D．48π

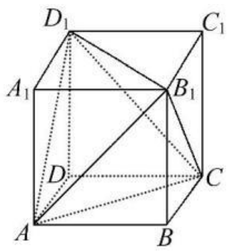
三、【课后作业】

一、选择题

1．将一个棱长为 a 的正方体，切成 27 个全等的小正方体，则表面积增加 (　　)

A．$6a^2$　　B．$12a^2$　　C．$18a^2$　　D．$24a^2$

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，三棱锥 D_1-AB_1C 的表面积与正方体的表面积的比为(　　)



A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3．已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上，若 $AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$，$AA_1=12$，则球 O 的半径为 (　　)

A．$\frac{3\sqrt{17}}{2}$　　B．$2\sqrt{10}$　　C．$\frac{13}{2}$　　D．$3\sqrt{10}$

4．一个斜三棱柱，底面是边长为 5 的正三角形，侧棱长为 4，侧棱与底面三角形两边所成的角都是 60°，则这个斜三棱柱的侧面积是(　　)

A．40　　B．20（$1+\sqrt{3}$）　　C．30（$1+\sqrt{3}$）　　D．$30\sqrt{3}$

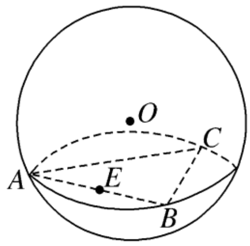
5．已知底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上，则该球的体积为(　　)

A.$\frac{32\pi}{3}$　　B.4π　　C.2π　　D.$\frac{4\pi}{3}$

二、填空题

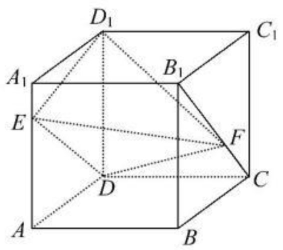
6．已知正三角形 ABC 三个顶点都在半径为 2 的球面上，球心 O 到平面 ABC 的距离为 1，

点 E 是线段 AB 的中点，过点 E 作球 O 的截面，则截面面积的最小值是________



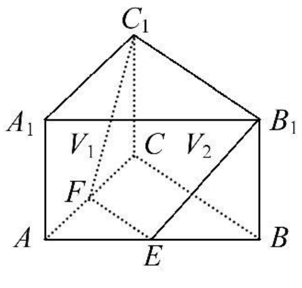
7．一个圆锥过轴的截面为等边三角形，它的顶点和底面圆周在球 O 的球面上，则该圆锥的表面积与球 O 的表面积的比值为_______.

8．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别为线段 AA_1，B_1C 上的点，则三棱锥 D_1-EDF 的体积为______.



三、解答题

9．如图所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 E，F 分别为 AB，AC 的中点，平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1，V_2 的两部分，求 V_1∶V_2.



答案精析

【典例分析】

题型一

例题 1

（1）【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

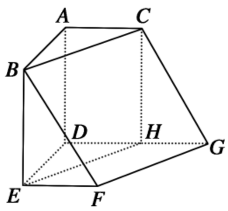
（2）【答案】 3

题型二

例题 2

（1）【答案】 4

【解析】 解法一：(分割法)因为几何体有两对相对面互相平行，(分析几何体的结构特征)

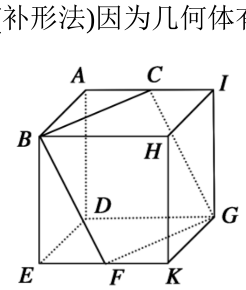


如图所示，过点 C 作 $CH\perp DG$ 于 H，连接 EH，即把多面体分割成一个直三棱柱 $DEH-ABC$ 和一个斜三棱柱 $BEF-CHG$.(分割)

由题意，知 $V_{三棱柱\,DEH-ABC}=S_{\triangle DEH}\times AD=(\frac{1}{2}\times2\times1)\times2=2$，$V_{三棱柱\,BEF-CHG}=S_{\triangle BEF}\times DE=(\frac{1}{2}\times2\times1)\times2=2$.(求各部分体积)

故所求几何体的体积为 $V_{多面体\,ABCDEFG}=2+2=4$.(得多面体体积)

解法二：(补形法)因为几何体有两对相对面互相平行(分析几何体的结构特征)



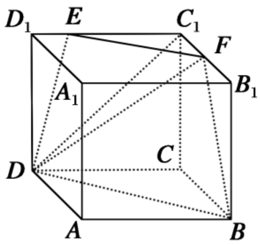
如图所示，将多面体补成棱长为 2 的正方体，显然所求多面体的体积即该正方体体积的一半．(补形)

又正方体的体积 $V_{正方体ABHI-DEKG}=2^3=8$，(求整体体积)

故所求几何体的体积为 $V_{多面体ABCDEFG}=\frac{1}{2}\times 8=4$.

（2）【答案】 A

【解析】 如图，连接 DF，DC_1，那么几何体 EFC_1-DBC 被分割成三棱锥 $D-EFC_1$ 及四棱锥 $D-CBFC_1$，那么几何体 EFC_1-DBC 的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 6+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(3+6)\times 6\times 6=12+54=66$.故所求几何体 EFC_1-DBC 的体积为 66.



题型三

例题 3

【答案】 (1) 3π；$4\sqrt{3}\pi$ (2)C

【解析】 (2)因为三棱锥 $S-ABC$ 是正棱锥，所以 $SB\perp AC$(对棱互相垂直)，所以 $MN\perp AC$，

又因为 $MN\perp AM$，而 $AM\cap AC=A$，

所以 $MN\perp$平面 SAC，即 $SB\perp$平面 SAC，

所以$\angle ASB=\angle BSC=\angle ASC=90°$，将此三棱锥补成正方体，则它

们有相同的外接球，所以 $2R=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ ，所以 $R=3$，

所以 $S=4\pi R^2=4\pi\cdot 3^2=36\pi$.

【课后作业】

一、

1.【答案】 B

【解析】 原正方体的表面积 $6a^2$，切成 27 个小正方体的表面积为 $27\times[6\times(\frac{1}{3}a)^2]=18a^2$，所以表面积增加了 $12a^2$.

2.【答案】 B

【解析】 三棱锥 D_1-AB_1C 的各面均是正三角形.其边长为正方体面对角线的长.

设正方体的棱长为 a，则面对角线长为$\sqrt{2}a$，$S_{锥}=4\times\frac{1}{2}(\sqrt{2}a)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a^2$，$S_{正方体}=6a^2$，

故 $S_{锥}:S_{正方体}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

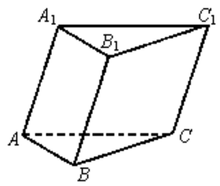
3.【答案】 C

【解析】 由题意知，结合图形，经过球心 O 和三棱柱的侧棱中点的大圆，与三棱柱的侧棱垂直，三棱柱的底面三角形 ABC 为直角三角形，其外接圆的圆心 O'为其斜边 BC 的中点，连接 OA，OO'，$O'A$，由勾股定理得，$OA^2=O'O^2+O'A^2$ 其中 $OA=R$，$OO'=\frac{1}{2}AA_1=6$，$O'A=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$，所以球 O 的半径为 $OA=R=\sqrt{6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{13}{2}$.

4.【答案】 B

【解析】 可计算出直截面的周长为 $5+5\sqrt{3}$，则 S 侧$=4(5+5\sqrt{3})=20(1+\sqrt{3})$．另解：如图，若$\angle A_1AC=\angle A_1AB=60°$，则可证明□$BB_1C_1C$ 为矩形，因此，

$S_{侧}=2S_{□AA_1B_1B}+S_{矩形BB_1C_1C}=2\times4\times5\times\sin60°+4\times5=20(1+\sqrt{3})$.



5【答案】D

由正四棱柱的各顶点均在同一个球面上，可设

正四棱柱的上底所在截面圆的半径为 R_1，则 $R_1^2+R_1^2=1$ 可得 $R^2{}_1=\frac{1}{2}$ 又侧棱长为 $\sqrt{2}$ ，所以球心到截面圆的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$；由截面圆半径、球心距、球半径构成直角三角形，根据勾股定理得球半径 $R=\sqrt{R^2{}_1+d^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=$ 1，代入球的体积公式得球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$

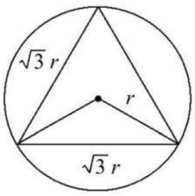
二、

6.【答案】 $\frac{9\pi}{4}$

【解析】 由题意知，正三角形 ABC 的外接圆半径为$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，则 $AB=3$，过点 E 的截面面积最小时，截面是以 AB 为直径的圆，截面面积 $S=\pi\times(\frac{3}{2})^2=\frac{9\pi}{4}$.

7.【答案】)$\frac{9}{16}$

【解析】 圆锥与球的截面如图，设球的半径为 r，则圆锥底面圆的直径为$\sqrt{3}r$，圆锥底面面积为$\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=\frac{3\pi r^2}{4}$ 圆锥的侧面面积为$\frac{1}{2}\sqrt{3}r\pi\cdot\sqrt{3}r=\frac{3\pi r^2}{2}$，所以圆锥的表面积为$\frac{3\pi r^2}{4}+\frac{3\pi r^2}{2}=\frac{9\pi r^2}{4}$，球的表面积为 $4r^2$，所以其面积比为$\frac{9}{16}$.



8.【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】 $\triangle DED_1$ 的面积为正方形面积的一半，三棱锥 $F-DED_1$ 的高即为正方体的棱长，所以 $V_{D_1-EDF}=V_{F-DED_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle DED_1}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}DD_1\cdot AD\cdot AB=\frac{1}{6}$.

三、

9.【答案】 解：延长 A_1A，C_1F，B_1E，其必交于一点，设为 A_2.延长 C_1C，B_1B 分别到点 C_2，B_2，使 $CC_2=BB_2=AA_2$，连接 A_2C_2，B_2C_2，A_2B_2，易知

$$V_{三棱柱A_1B_1C_1-A_2B_2C_2}=2V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=2\left(V_1+V_2\right)$$

由图，可得 $V_{三棱锥A_2-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\times 2(V_1+V_2)=\frac{2}{3}(V_1+V_2)$

因为 E，F 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $V_{三棱台AFE-A_1C_1B_1}=\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}(V_1+V_2)=\frac{7}{12}(V_1+V_2)=V_1$.

即 $7V_2=5V_1$.所以 $V_1:V_2=7:5$