学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线 内 不 要 答 题

湖南师大附中2022届高三月考试卷(一)

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共8页.时量120分钟.满分150分.

得分:________

第Ⅰ卷

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

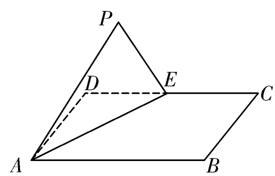
1.已知全集$U=\{x\in \mathbf{N}^* \mid 1\leqslant x\leqslant 6\}$,集合$A=\{1,2,3,5\}$,$B=\{3,4,5\}$,则$A\cap(\complement_U B)=$

A.$\{1,6\}$　　B.$\{2,6\}$　　C.$\{1,2\}$　　D.$\{1,2,6\}$

2.某医院工作人员所需某种型号的口罩可以外购,也可以自己生产.其中外购的单价是每个1.2元,若自己生产,则每月需投资固定成本2000元,并且每生产一个口罩还需要材料费和劳务费共0.8元.设该医院每月所需口罩$n(n\in \mathbf{N}^*)$个,则自己生产口罩比外购口罩较合算的充要条件是

A.$n>800$　　B.$n>5000$　　C.$n<800$　　D.$n<5000$

3.如图,在矩形$ABCD$中,点E为CD边上一动点(不包括端点),将$\triangle ADE$沿AE翻折成$\triangle PAE$,使得平面$PAE\perp$平面$ABCE$.给出下列两个结论:



①在平面$ABCE$内过点C有且只有一条直线与平面PAE平行;

②在CD边上存在点E使得$PE\perp AB$.

则下列判断正确的是

A.①正确,②错误　　B.①错误,②正确

C.①,②都正确　　D.①,②都错误

4.函数$f(x)=2^{x+4}+\dfrac{1}{2^x}$的图象关于

A.点$(-2,0)$对称　　B.直线$x=-2$对称

C.点$(2,0)$对称　　D.直线$x=2$对称

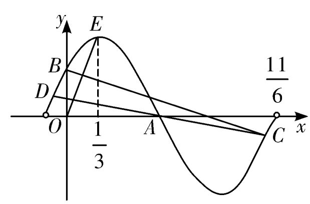
5. 宋代著名类书《太平御览》记载："伏羲坐于方坛之上，听八风之气，乃画八卦."乾为天，坤为地，震为雷，坎为水，艮为山，巽为风，离为火，兑为泽，象征八种自然现象，以类万物之情. 如图所示为太极八卦图，八卦分据八方，中绘太极，古代常用此图作为除凶避灾的吉祥图案. 八卦中的每一卦均由纵向排列的三个爻组成，其中"━━"为阳爻，"╍╍"为阴爻. 现从八卦中任取两卦，已知取出的两卦中有一卦恰有一个阳爻，则另一卦至少有两个阳爻的概率为

A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{3}{7}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 设$(1+x)^6(1+ax)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，若$a_2=-9$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$的值为

A. 63　　B. 64　　C. 65　　D. -65

7. 如图，函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$在一个周期内的图象(不包括端点)与$x$轴，$y$轴的交点分别为$A,B$，与过点$A$的直线另相交于$C,D$两点，$E$为图象的最高点，$O$为坐标原点，则$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{OE}=$



A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{14}{9}$　　C. $-\frac{2}{9}$　　D. $-\frac{4}{9}$

8. 已知点$P(2,2)$，若圆C：$(x-5)^2+(y-6)^2=r^2(r>0)$上存在两点A,B，使得$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$，则$r$的取值范围是

A. $(0,5)$　　B. $\left(\frac{5}{2},5\right)$　　C. $[1,5)$　　D. $\left[\sqrt{5},\frac{5}{2}\right)$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.

9. 已知实数a满足$\frac{3-ai}{1+i}=2-i$（i为虚数单位），设复数$z=(a+1)+(a-1)i$，则下列结论正确的是

A. z为纯虚数　　B. z^2为虚数　　C. $z+\bar{z}=0$　　D. $z\cdot\bar{z}=4$

10. 设等比数列$\{a_n\}$的各项都为正数，其前n项和为S_n，已知$a_7=a_6+2a_5$，且存在两项a_m，a_n，使得$\sqrt{a_m a_n}=4a_1$，则下列结论正确的是

A. $a_{n+1}=2a_n$　　B. $S_n=a_{n+1}-a_1$

C. $m+n=6$　　D. $mn=8$

11. 若椭圆上存在点P，使得点P到椭圆的两个焦点的距离之比为$2:1$，则称该椭圆为“倍径椭圆”. 则下列椭圆中为“倍径椭圆”的是

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$　　B. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$

C. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$　　D. $\frac{x^2}{33}+\frac{y^2}{36}=1$

12. 已知互不相等的三个实数a，b，c都大于1，且满足$\lg a\cdot\lg\frac{a}{c}=\lg c\cdot\lg\frac{a}{b}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系可能是

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$

C. $a<c<b$　　D. $b<a<c$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第Ⅱ卷

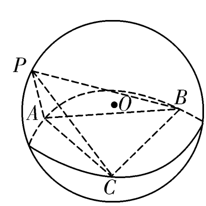
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=3$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________.

14. 已知$\sin(\pi+\alpha)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，则$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$的值为________.

15. 设直线$y=x$与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$相交于$A$，$B$两点，$P$为$C$上不同于$A$，$B$的一点，直线$PA$，$PB$的斜率分别为$k_1$，$k_2$，若$C$的离心率为2，则$k_1\cdot k_2=$________.

16. 如图，三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在球O的球面上，$PA\perp PC$，$\triangle ABC$是边长为6的正三角形，二面角$P-AC-B$的大小为120°，则点O到平面ABC的距离为________，球O的表面积为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\dfrac{a-c}{a+b}=\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin C}$.

(1)求角 B 的大小；

(2)设 $m=2a-c$，若 $b=\sqrt{3}$，且 A，C 都为锐角，求 m 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=2$，且 $4a_3$ 为 S_4，S_5 的等比中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的首项 a_1 的值；

(2)设 $b_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_na_{n+1}\cdot 2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.(本小题满分 12 分)

今年五月,某医院健康管理中心为了调查成年人体内某种自身免疫力指标,从在本院体检的人群中随机抽取了 100 人,按其免疫力指标分成如下五组:(10,20],(20,30],(30,40],(40,50],(50,60],其频率分布直方图如图 1 所示. 今年六月,某医药研究所研发了一种疫苗,对提高该免疫力有显著效果. 经临床检测,将自身免疫力指标比较低的成年人分为五组,各组分别按不同剂量注射疫苗后,其免疫力指标 y 与疫苗注射量 x 个单位具有相关关系,样本数据的散点图如图 2 所示.

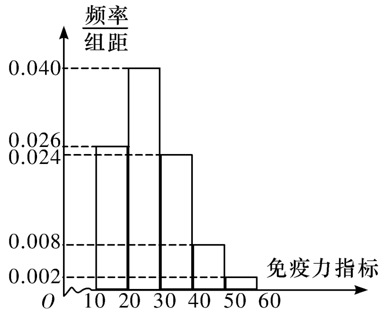


图1

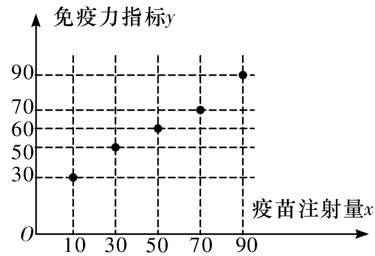


图2

(1)健管中心从自身免疫力指标在(40,60]内的样本中随机抽取 3 人调查其饮食习惯,记 X 表示这 3 人中免疫力指标在(40,50]内的人数,求 X 的分布列和数学期望;

(2)由于大剂量注射疫苗会对身体产生一定的副作用,医学部门设定:自身免疫力指标较低的成年人注射疫苗后,其免疫力指标不应超过普通成年人群自身免疫力指标平均值的3倍. 以健管中心抽取的100人作为普通人群的样本,据此估计疫苗注射量不应超过多少个单位.

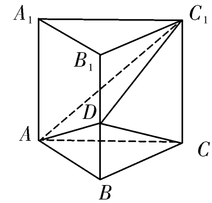
附:对于一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$,其回归直线 $\hat{y}=bx+a$ 的斜率和截距的最小二乘估计值分别为 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$,$a=\bar{y}-b\bar{x}$.

20.（本小题满分 12 分）

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底边长和侧棱长都为 2，点 D 在棱 BB_1 上运动（不包括端点）.

（1）若 D 为 BB_1 的中点，证明：$CD\perp AC_1$；

（2）设平面 AC_1D 与平面 ABC 所成的二面角大小为 θ（θ 为锐角），求 $\cos\theta$ 的取值范围.



21.（本小题满分 12 分）

设抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线 C 上，O 为坐标原点，已知 $|OM|=2\sqrt{3}$，$|MF|=3$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过焦点 F 作直线 l 交 C 于 A，B 两点，P 为 C 上异于 A，B 的任意一点，直线 PA，PB 分别与 C 的准线相交于 D，E 两点，证明：以线段 DE 为直径的圆经过 x 轴上的两个定点.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}(x^2-1)$.

(1)若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是减函数，求 a 的取值范围；

(2)已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，若 $0<a<1$，求 $f(x)$ 的零点个数.

湖南师大附中2022届高三月考试卷(一)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	B	D	A	D	C	ACD	ABC	BC	AB

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 【解析】由题设,$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,则 $\complement_U B=\{1,2,6\}$,所以 $A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$,选C.

2. B 【解析】由 $0.8n+2000<1.2n$,得 $0.4n>2000$,即 $n>5000$,选B.

3. A 【解析】①在 AB 上取点 F,使 $AF=EC$,则四边形 $AECF$ 为平行四边形,得 $CF\parallel AE$,从而 $CF\parallel$ 平面 PAE,结论正确;
②作 $PM\perp AE$,垂足为 M,因为平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$,则 $PM\perp$ 平面 $ABCE$,所以 $PM\perp AB$.
假设 $PE\perp AB$,则 $AB\perp$ 平面 PAE,从而 $AB\perp AE$,这与$\angle BAE$为锐角矛盾,所以假设不成立,结论错误,选A.

4. B 【解析】因为 $f(x)=2^{x+4}+\frac{1}{2^x}=4\left(2^{x+2}+\frac{1}{2^{x+2}}\right)$,设 $g(x)=4\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)$,则 $f(x)=g(x+2)$.
因为 $g(-x)=g(x)$,则 $g(x)$ 为偶函数,其图象关于 y 轴对称,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称,选B.

5. D 【解析】由八卦图可知,八卦中有1卦有三个阳爻,有3卦恰有一个阳爻,有3卦恰有两个阳爻,有1卦没有阳爻.设取出的两卦中"有一卦恰有一个阳爻"为事件 A,"另一卦至少有两个阳爻"为事件 B.
解法一:因为 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{9}{14}$,$P(AB)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{3}$,选D.
解法二:因为 $n(A)=C_3^1C_5^1+C_3^2=18$,$n(AB)=C_3^1C_4^1=12$,所以 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$,选D.

6. A 【解析】因为 $a_2=C_6^0C_4^2a^2+C_6^1C_4^1a+C_6^2C_4^0=6a^2+24a+15$,则 $6a^2+24a+15=-9$,即 $a^2+4a+4=0$,所以 $a=-2$.
在 $(1+x)^6(1-2x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$ 中,令 $x=0$,则 $a_0=1$.
令 $x=1$,则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^6=64$,所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=64-a_0=63$,选A.

7. D 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T,由图知,$\frac{3}{4}T=\frac{11}{6}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$,则 $T=2$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.
因为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$,则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$,即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$.
由题设,点 $A\left(\frac{5}{6},0\right)$,$B\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$E\left(\frac{1}{3},1\right)$,则 $\overrightarrow{BA}=\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{3},1\right)$.因为 $f(x)$ 的图象关于点 A 对称,则 A 为线段 CD 的中点,所以 $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OE}=2\left(\frac{5}{18}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{9}$,选D.

8. C 【解析】取 AB 的中点 D,则 $CD\perp AB$.因为 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$,则 $|PD|=5|AD|$,设 $|CD|=d$,则 $\sqrt{|PC|^2-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$.因为点 $P(2,2)$,$C(5,6)$,则 $|PC|^2=(5-2)^2+(6-2)^2=25$,
所以 $\sqrt{25-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$,得 $d^2=\frac{25}{24}(r^2-1)$.因为 $0\leqslant d<r$,则 $0\leqslant\frac{25}{24}(r^2-1)<r^2$,解得 $1\leqslant r<5$,选C.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得2分.

9. ACD 【解析】由已知,$3-a\mathrm{i}=(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$,则 $a=-1$,所以 $z=-2\mathrm{i}$ 为纯虚数,$z^2=-4$ 为实数,因为 $\bar{z}=2\mathrm{i}$,则 $z+\bar{z}=0$,$z\cdot\bar{z}=4$,选ACD.

10. ABC 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$,由已知,$a_1q^6=a_1q^5+2a_1q^4$,整理得 $q^2-q-2=0$,
解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍去),所以 $a_{n+1}=qa_n=2a_n$,$S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}=a_{n+1}-a_1$.
因为 $\sqrt{a_ma_n}=4a_1$,则 $a_ma_n=16a_1^2$,即 $a_1^2\cdot 2^{m+n-2}=16a_1^2$,所以 $m+n=6$,选ABC.

11. BC 【解析】设点 P 到椭圆两个焦点的距离分别为 m 和 $2m$,则 $2m+m=2a$,即 $m=\frac{2a}{3}$.
因为 $m\geqslant a-c$,则 $\frac{2a}{3}\geqslant a-c$,即 $a\leqslant 3c$.经检验,椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$ 和 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$ 满足要求,选BC.

12. AB 【解析】由已知,$\lg a(\lg a-\lg c)=\lg c(\lg a-\lg b)$,即 $\lg^2a-2\lg a\cdot\lg c+\lg b\cdot\lg c=0$.
则关于 x 的方程 $x^2-2x\lg c+\lg c\cdot\lg b=0$ 有正实根,所以 $\Delta=4\lg^2c-4\lg c\cdot\lg b=4\lg c(\lg c-\lg b)\geqslant 0$.
因为 $b\neq c$,$b>1$,$c>1$,则 $\lg c>\lg b$,所以 $c>b$.

设 $f(x)=x^2-2x\lg c+\lg c\cdot\lg b$，则二次函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\lg c$ 对称，且 $f(\lg a)=0$，$f(\lg b)=\lg^2 b-\lg b\cdot\lg c=\lg b(\lg b-\lg c)<0$. 若 $x=\lg a$ 是 $f(x)$ 的一个较小零点，则 $\lg a<\lg b<\lg c$，即 $a<b<c$；若 $x=\lg a$ 是 $f(x)$ 的一个较大零点，则 $\lg b<\lg c<\lg a$，即 $b<c<a$，选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $120°$ 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-4\cos\theta$.

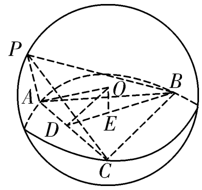
由已知，$1-4\cos\theta=3$，则 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$. 又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=120°$.

14. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ 【解析】由已知，$-\sin\alpha=2\sqrt{3}\cos\alpha$，则 $\tan\alpha=-2\sqrt{3}$，所以 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-6}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

15. 3 【解析】据题意，点 A,B 关于原点对称，设点 $A(x_0,y_0)$，$B(-x_0,-y_0)$，$P(x,y)$，则 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$. 两式相减，得 $\frac{x^2-x_0^2}{a^2}=\frac{y^2-y_0^2}{b^2}$，则 $\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}$.

因为 $e=2$，所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{y+y_0}{x+x_0}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1=3$.

16. 1　52π 【解析】取 AC 的中点 D，连接 BD. 设 E 为 $\triangle ABC$ 的外心，则点 E 在 BD 上，且 $BE=2ED$. 因为 $PA\perp PC$，则 D 为 $\mathrm{Rt}\triangle APC$ 的外心.



根据球的几何性质，有 $OE\perp$ 平面 ABC，$OD\perp$ 平面 PAC.

因为二面角 $P-AC-B$ 的大小为 $120°$，平面 $OAC\perp$ 平面 PAC，

则二面角 $O-AC-B$ 的大小为 $30°$，所以 $\angle ODE=30°$.

因为 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的正三角形，则 $BD=6\sin 60°=3\sqrt{3}$，

所以 $ED=\frac{BD}{3}=\sqrt{3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OED$ 中，$OE=ED\tan 30°=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中，因为 $AD=3$，$OD=2$，则 $OA=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{13}$，所以球 O 的半径 $R=\sqrt{13}$，

表面积 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times 13=52\pi$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 由已知及正弦定理，得 $\frac{a-c}{a+b}=\frac{a-b}{c}$，即 $(a-c)c=a^2-b^2$，即 $ac=a^2+c^2-b^2$. ……(3 分)

由余弦定理，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$. 因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=60°$. ……(5 分)

(2) 因为 $b=\sqrt{3}$，$B=60°$，则 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=2$，得 $a=2\sin A$，$c=2\sin C$. ……(6 分)

所以 $m=4\sin A-2\sin C=4\sin A-2\sin(120°-A)=4\sin A-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)=3\sin A-\sqrt{3}\cos A$

$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A\right)=2\sqrt{3}\sin(A-30°)$. ……(8 分)

因为 A,C 都为锐角，$A+C=120°$，则 $30°<A<90°$，$0°<A-30°<60°$，$0<\sin(A-30°)<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $m\in(0,3)$. ……(10 分)

18.【解析】(1) 因为 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，则数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列. ……(1 分)

则 $a_3=a_1+2\times 2=a_1+4$，$S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}\times 2=4(a_1+3)$，$S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}\times 2=5(a_1+4)$. ……(4 分)

由已知，$S_4S_5=16a_3^2\neq 0$，则 $5(a_1+3)(a_1+4)=4(a_1+4)^2$，即 $a_1^2+3a_1-4=0$，即 $(a_1+4)(a_1-1)=0$.

因为 $a_3\neq 0$，则 $a_1+4\neq 0$，所以 $a_1=1$. ……(6 分)

(2) 因为数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，则 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$. ……(8 分)

由题设，$b_n=\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1)\cdot 2^n}==\frac{2(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)\cdot 2^n}=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}$. ……(10 分)

所以 $T_n=\left(1-\frac{1}{3\cdot 2}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 2}-\frac{1}{5\cdot 2^2}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}\right]=1-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}$. ……(12 分)

19.【解析】(1) 由直方图知，自身免疫力指标在 $(40,50]$ 内的人数为 $0.008\times 10\times 100=8$，在 $(50,60]$ 内的人数为 $0.002\times 10\times 100=2$，则 X 的可能取值为 1，2，3. ……(1 分)

其中 $P(X=1)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$，$P(X=3)=\frac{C_8^3C_2^0}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$. ……(4 分)

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

$EX=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{7}{15}=\frac{12}{5}$. ……………………………………………………………………………(6 分)

(2)由散点图知,5 组样本数据(x,y)分别为$(10,30)$,$(30,50)$,$(50,60)$,$(70,70)$,$(90,90)$,

且 x 与 y 具有线性相关关系. ……………………………………………………………………………(7 分)

因为 $\bar{x}=50$,$\bar{y}=60$,则 $b=\frac{10\times30+30\times50+50\times60+70\times70+90\times90-5\times50\times60}{10^2+30^2+50^2+70^2+90^2-5\times50^2}=\frac{7}{10}$,

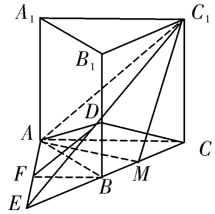
$a=60-\frac{7}{10}\times50=25$,所以回归直线方程为 $\hat{y}=0.7x+25$. ……………………………………………(10 分)

由直方图知,免疫力指标的平均值为 $15\times\frac{26}{100}+25\times\frac{40}{100}+35\times\frac{24}{100}+45\times\frac{8}{100}+55\times\frac{2}{100}=27$. ……………(11 分)

由 $\hat{y}\leqslant27\times3=81$,得 $0.7x+25\leqslant81$,解得 $x\leqslant80$.

据此估计,疫苗注射量不应超过 80 个单位. …………………………………………………………………(12 分)

20.【解析】解法一:(1)取 BC 的中点 M,连接 AM,C_1M.



因为$\triangle ABC$为正三角形,则 $AM\perp BC$. 由已知 $BB_1\perp AM$,则 $AM\perp$平面 BB_1C_1C,

所以 $AM\perp CD$. ① ……………………………………………………………………………(2 分)

因为 $BD=CM=1$,$BC=CC_1=2$,则 $\mathrm{Rt}\triangle DBC\cong\mathrm{Rt}\triangle MCC_1$,

所以$\angle BCD=\angle CC_1M$,从而$\angle DCC_1$ 与$\angle CC_1M$ 互余,所以 $C_1M\perp CD$. ②

结合①②知,$CD\perp$平面 AMC_1,所以 $CD\perp AC_1$. ……………………………………………(5 分)

(2)分别延长 CB,C_1D 相交于 E,连接 AE,则二面角 $D-AE-B$ 的平面角为 θ.

作 $BF\perp AE$,垂足为 F,连接 DF,则 $DF\perp AE$,所以$\angle BFD=\theta$. ……………………………………(6 分)

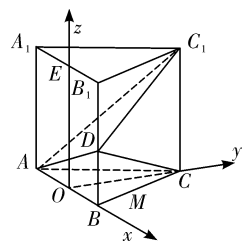
设 $BE=x(x>0)$,在$\triangle ABE$ 中,由余弦定理可得 $AE=\sqrt{x^2+2x+4}$,

由等面积法可得 $BF=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. 因为$\triangle BED\backsim\triangle CEC_1$,则 $BD=\frac{2x}{x+2}$. ……………………………(9 分)

在 $\mathrm{Rt}\triangle DBF$ 中,$\tan\theta=\frac{BD}{BF}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x+2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{2x}{x^2+4x+4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x+\frac{4}{x}+4}}$. …………(10 分)

因为 $x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$,则 $1\leqslant\tan\theta<\frac{2}{\sqrt{3}}$,所以 $\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}\in\left(\frac{\sqrt{21}}{7},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. ……………(12 分)

解法二:(1)分别取 AB、A_1B_1 的中点 O、E,则直线 OB,OC,OE 两两互相垂直,以 O 为原点,直线 AB,OC,OE 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系. ……………………………………………(1 分)



因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底边长和侧棱长都为 2,D 为 BB_1 的中点,则点 $A(-1,0,0)$,

$C(0,\sqrt{3},0)$,$D(1,0,1)$,$C_1(0,\sqrt{3},2)$. ……………………………………………………(3 分)

从而$\overrightarrow{CD}=(1,-\sqrt{3},1)$,$\overrightarrow{AC_1}=(1,\sqrt{3},2)$,则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC_1}=1-3+2=0$,

所以 $CD\perp AC_1$. ……………………………………………………………………………(5 分)

(2)设 $BD=t(0<t<2)$,则点 $D(1,0,t)$,$\overrightarrow{AD}=(2,0,t)$. ……………………………………………(6 分)

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 AC_1D 的法向量,由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}x+\sqrt{3}y+2z=0,\\ 2x+tz=0,\end{cases}$取 $z=2$,则 $x=-t$,$y=\frac{t-4}{\sqrt{3}}$,所以 $\boldsymbol{n}=\left(-t,\frac{t-4}{\sqrt{3}},2\right)$. …………………(9 分)

又平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{t^2+\frac{(t-4)^2}{3}+4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t^2-2t+7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(t-1)^2+6}}$.

因为 $0<t<2$,则$\sqrt{6}\leqslant\sqrt{(t-1)^2+6}<\sqrt{7}$,所以 $\cos\theta\in\left(\frac{\sqrt{21}}{7},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. …………………………………(12 分)

21.【解析】(1)设点 $M(x_0,y_0)$,因为点 M 在抛物线 C 上,$|OM|=2\sqrt{3}$,则$\begin{cases}y_0^2=2px_0,\\ x_0^2+y_0^2=12,\end{cases}$

得 $x_0^2+2px_0=12$,即$(x_0+p)^2=p^2+12$. 因为 $x_0>0$,则 $x_0=\sqrt{p^2+12}-p$. ……………………………(3 分)

因为$|MF|=3$,则 $x_0+\frac{p}{2}=3$,即 $\sqrt{p^2+12}-\frac{p}{2}=3$,所以 $p^2+12=\left(\frac{p}{2}+3\right)^2$,化简得 $p^2-4p+4=0$,解得 $p=2$,所以抛物线 C 的方程是 $y^2=4x$. …… (5 分)

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+1$,代入 $y^2=4x$,得 $y^2-4ty-4=0$.

设点 $A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$,则 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-4$. …………………………………………………… (6 分)

设点 $P\left(\frac{m^2}{4},m\right)$,则 $k_{PA}=\frac{y_1-m}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{m^2}{4}}=\frac{4}{y_1+m}$,直线 PA 的方程为 $y-m=\frac{4}{y_1+m}\left(x-\frac{m^2}{4}\right)$.

令 $x=-1$,得 $y=m-\frac{4}{y_1+m}\left(1+\frac{m^2}{4}\right)=\frac{my_1-4}{y_1+m}$,所以点 $D\left(-1,\frac{my_1-4}{y_1+m}\right)$. ……………………………… (8 分)

同理,点 $E\left(-1,\frac{my_2-4}{y_2+m}\right)$. ………………………………………………………………………………………… (9 分)

设以线段 DE 为直径的圆与 x 轴的交点为 $N(a,0)$,

则$\overrightarrow{DN}=\left(a+1,-\frac{my_1-4}{y_1+m}\right)$,$\overrightarrow{EN}=\left(a+1,-\frac{my_2-4}{y_2+m}\right)$. ………………………………………………………… (10 分)

因为 $DN\perp EN$,则$\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{EN}=0$,即$(a+1)^2+\frac{my_1-4}{y_1+m}\cdot\frac{my_2-4}{y_2+m}=0$,

则$(a+1)^2=-\frac{(my_1-4)(my_2-4)}{(y_1+m)(y_2+m)}=-\frac{m^2y_1y_2-4m(y_1+y_2)+16}{y_1y_2+m(y_1+y_2)+m^2}=\frac{4m^2+16mt-16}{m^2+4mt-4}=4$,得 $a=1$ 或 -3.

故以线段 DE 为直径的圆经过 x 轴上的两个定点$(1,0)$和$(-3,0)$. …………………………………………………… (12 分)

22.【解析】(1)$f'(x)=\ln x+1-ax$. 因为 $f(x)$在$(0,+\infty)$内是减函数,则当 $x>0$ 时,$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,

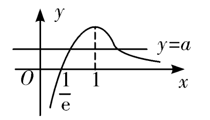
即 $\ln x+1-ax\leqslant 0$,即 $a\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$恒成立. ……………………………………………………………………………… (2 分)

设 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,则 $g'(x)=\frac{1-(\ln x+1)}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$. …………………………………………………………… (3 分)

由 $g'(x)>0$,得 $\ln x<0$,即 $0<x<1$,所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,从而 $g(x)_{\max}=g(1)=1$.

因为 $a\geqslant g(x)$恒成立,所以 a 的取值范围是$[1,+\infty)$. …………………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)知,$g(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减. 又当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$g(x)<0$;当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$g(x)>0$,则函数 $y=g(x)$的大致图象如图所示. ………………………………………………………… (6 分)



因为 $0<a<1$,则直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$的图象有两个不同的交点,

从而 $f'(x)$有两个变号零点,所以 $f(x)$有两个不同的极值点.

设 $f(x)$的两个极值点为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$. 则$\frac{1}{\mathrm{e}}<x_1<1<x_2$. ………………………………………………… (7 分)

当 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时,因为 $a>g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,则 $f'(x)=\ln x+1-ax<0$,所以 $f(x)$在$(0,x_1)$,$(x_2,+\infty)$上单调递减;

当 $x_1<x<x_2$ 时,因为 $a<g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,则 $f'(x)=\ln x+1-ax>0$,所以 $f(x)$在(x_1,x_2)上单调递增,

从而 $f(x)$的极小值点为 x_1,极大值点为 x_2. ………………………………………………………………………… (9 分)

因为 $x_1<1<x_2$,则 $f(x_1)<f(1)=0$,$f(x_2)>f(1)=0$,所以 $f(x)$在(x_1,x_2)内有一个零点. ……………… (10 分)

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$,$f(x)=x^2\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}$,则当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to-\infty$,所以 $f(x)$在$(x_2,+\infty)$内有一个零点. ……… ……… (11 分)

因为$\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to\frac{a}{2}>0$,所以 $f(x)$在$(0,x_1)$内有一个零点.

综上分析,$f(x)$有 3 个零点. …………………………………………………………………………………………………… (12 分)