

从“教教材”到“教好教材”^①

——以人教版“角的比较和运算”为例

谈发¹ 聂淑媛²

(1. 洛阳市第五十五中学 471009; 2. 洛阳师范学院数学科学学院 471934)

1 前言

自《义务教育数学课程标准(2011 年版)》颁布后,基于新课标编写、修订的各版本教材如雨后春笋.在遵循核心规则的前提下,各版本特色鲜明,许多教师在准备具体授课内容时,通常会收集几种不同版本的教学材料,相互对比加以印证融合,进而做出教学设计.教育主管部门也比较推崇教师结合本校的具体情况,做好校本研究.教育资源的极大丰富,既给教学提供了便利条件,也对教师提出了更高要求^[1].作为教学一线的普通教师,和制订课标、编写教材的大师相比,对数学本质的认识、对课标的领悟还有些许欠缺,教师们基于不同版本教材博采众长尚存一定的难度.因此,在“用教材教而非教教材”的共识下,教师的一般做法是,完成课本基本内容后,汇总不同练习题作为提高和补充,看似蜜蜂采蜜,实则贪多嚼不烂,易导致课堂主次不分或头重脚轻.笔者认为,一线教师要对教材有足够的敬畏之心,备课的首要前提是备好教材,仅仅熟知教材内容是远远不够的,教师需要潜心研读教材,准确理解其编写意图,深度体会教材蕴藏的数学核心素养呈现模式,及其渗透的数学文化传承思想^[2],在融会贯通的基础上,逐渐达成从“教教材”到“教好教材”的目标.

从教初中数学 25 年来,笔者始终坚持以课程标准为本,以教材为中心,从三个层面反复仔细阅读教材和教师教学用书:首先,通读从小学到高中的数学教材,建构整个中小学数学教学的大教育观;其次,重点研读初中数学教材,更清晰地认知

所教学段数学知识的实质;第三,对授课章节进行逐段逐句地研读剖析,深刻理解教学内容,领悟专家的编写理念,合理汲取专家的教学意见和建议,进而选取适当的教学方法和教学策略^[3].现以人教版“角的比较和运算”为例,呈现笔者对教材的认知以及相应的教学设计思路,供同行商榷.

2 对教材的研读与解析

“角的比较和运算”是七年级上册第四章第三单元第二节的内容,第四章“图形认识初步”是初中数学几何部分的起始章,是系统学习平面几何知识的开端,第三单元“角”位于“多姿多彩的图形”和“直线、射线、线段”之后,学生对基本几何图形的学习方法以及图形性质的研究方式有了初步体验,“角的比较与运算”是本单元的第二节,学生已经学习了“角”,系统掌握了角的相关概念.以此为起点和背景,首先对本节的教材内容进行解读分析.

(1) 简洁引言中蕴含着丰富的教学信息

根据图 1 中标注[1]的内容,首先能够读出下述信息:从教学内容上来讲,角的比较方法有度量法、叠合法两种方法;从教学策略上看,可以采取与线段进行类比的教学手段.同时,标注[2]清晰地定义了如何利用叠合法比较角的大小,为教师演示、讲授叠合法提供了具体操作方法,因此,教材既详述了教学目标与教学内容,也明确了教学策略与教学方法^[4],可谓语言简练、内容饱满、信息丰富.

① 基金项目:河南省高等教育教学改革研究与实践项目“一流专业建设背景下师范院校实施卓越数学教师培养计划 2.0 的研究与实践”(编号:2019SJGLX391);洛阳市 2020 年度基础教育科研课题“核心素养视角下中学数学课堂教学的实践研究”(编号:LYKT2037023).

4.3.2 角的比较与运算

你已经知道了比较两条线段长短的方法, 怎样比较两个角的大小呢?

与线段长短的比较类似, 我们可以用量角器量出角的度数, 然后比较它们的大小; 也可以把它们的一条边叠合在一起, 通过观察另一条边的位置来比较两个角的大小 (图 4.3-6).

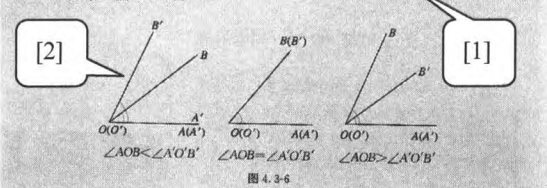


图 1

(2) 留白“思考”引发的数学思想方法——数形结合

教材的思考栏, 如图 2 所示, 不仅从形上直观说明了两角和与差的意义, 而且利用数学符号简洁表示, 在图形和等式之间建立了一种对应关系. 通过简单的几何计数, 让学生明确认识到: 两个角的和与差仍然是一个角. 借助图形分析数量关系, 把概念的几何意义与角度的数量表示紧密相连, 使之易于推证: 两角和与差的度数即为其度数的和与差, 达成数、形的有机结合.

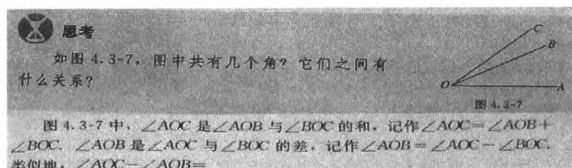


图 2

(3) 貌似平淡的探究应带来无限创意

对于图 3 的探究部分, 如果仅仅认为是用三角尺拼出了一些特殊角, 则对课本内容的理解过于机械肤浅, 把图 2 和图 3 中包含的“图 4.3-7”与“图 4.3-8”相互对比, 教师至少应该拓展到以下研究视角: ①强化两角和与差的概念; ②两个特殊角的和与差; ③选取两角的多种组合模式; ④对角的大小的几何直观认识; ⑤对于两角的选取, 以及其它类似问题, 都可以从特殊情形自然过渡到一般情形.

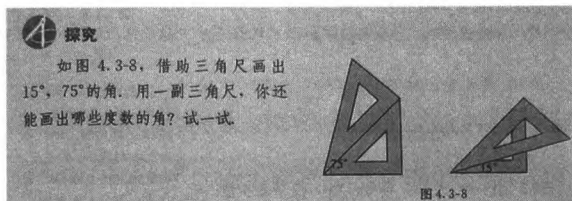


图 3

(4) 类比下的概念教学——全方位的诠释

如图 4 标注[3]所示, 类比教学贯穿于本节课的始终, 从线段中点的定义到角平分线的定义, 从线段的三等分点到角的三等分线, 乃至在透明纸上折叠找线段中点到通过折叠作角平分线等, 旨在使陌生知识变得似曾相识. 角平分线是本节另外一个重要知识点, 为避免出现概念模糊的错误, 教材采取了多种办法, 见标注[4]: 其设计的等式“如果 $\angle AOB = \angle BOC$, 那么 $\angle AOC = 2\angle AOB = 2\angle BOC$, $\angle AOB = \angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOC$ ”, 从“倍角”和“半角”两个相反的关系刻画角平分线的性质; 该等式的适当留白, 给学生留出了思考空间, 有利于加深其对概念的理解; 同时, 等式和图 4 中包含的“图 4.3-9”形成了对应关系, 这恰好是利用文字、符号和图象三种数学语言对“角平分线”进行了综合描述.

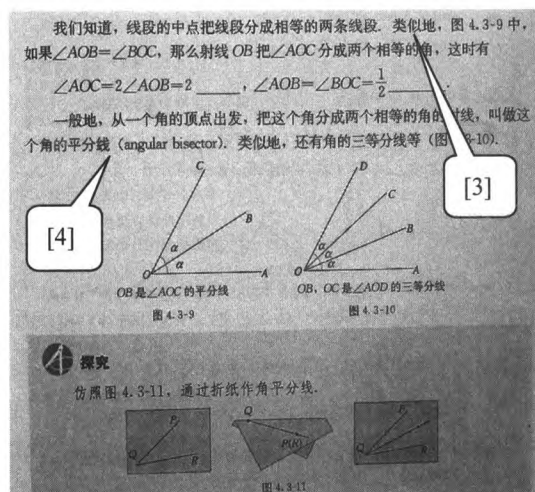


图 4

(5) 思维缜密、前后照应的例题和习题

根据图 5 中教材例 1 的安排, 至少可以解读出三层意思: ①对两角和与差的拓展, 其中, 角可以选取特殊的平角; ②度分秒的计算; ③为下一节的两角互补提供铺垫. 例 2 是一道经典老题, 包含了度分秒的除法计算, 结合前面所讲角度的和差倍计算, 至此出现了角的所有运算种类. 计算过程中, 需要对度的余数继续进行除法运算, 且完美运用了度分秒计算的退位法则, 有别于加减法的进位和借位, 使得度分秒的计算法则完整、全面.

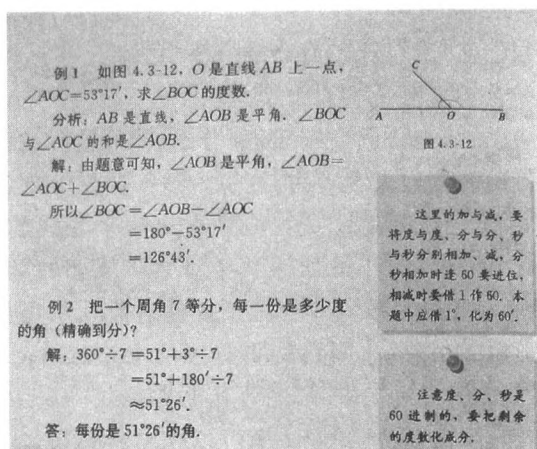


图 5

教材课堂练习与习题的选取,也体现了编写专家的良苦用心与精益求精,比如练习 3,既是例 1 的有机结合,为后续的互补互余做好铺垫,又是本节教学内容的高度融合.平角状态下的角平分线,既是角平分线性质的一个补充,又为直角的出现提供了自然途径.本题中两角之和为直角与例 1 中两角之和为平角,都可视为下节课余角和补角的储备知识.

3 研透教材后的教学设计

根据上述对教材内容的研读分析,结合教师教学用书细致琢磨研讨,反复深度加工教学内容、深入挖掘数学思想、精雕细琢教学方法^[5],设计了如下教学过程:

教学环节 1:角的大小比较

教学活动:教师展示自制教具——利用纸板做成的两个角的模型,引导学生观察,直观感知其大小,并大致估计两个角的度数.师生共同把两个角画在黑板上,借助量角器度量出它们的度数,如图 6 所示.

设计意图:引导学生从“数”和“形”的不同视角感知角的大小,不仅巧妙渗透了数形结合的思想方法,而且由教学实践逐渐螺旋上升到理论认知:从数量上看,度数越大则角越大;从形上看,开口越大则角越大.

注:两个角的度数分别是 $\angle 1 = 48^\circ 30'$ 、 $\angle 2 = 27^\circ 48'$,对其度数的设定看似无心、实则有意^[6],为后续角的和差计算中的进位和借位埋下伏笔.

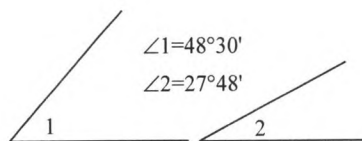


图 6

教学活动:对于比较角的大小的第二种方法——叠合法,类比于线段长短的比较,教师首先借助实物教具演示操作,然后在黑板上示范几何作图,结果如图 7.

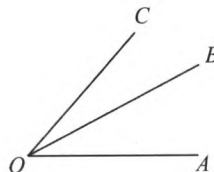


图 7

设计意图:由旧知到新知的类比迁移,是学生最易于接受和掌握的学习形式之一.从直观到抽象的不同操作方法,不仅强化了对于叠合法的实质性理解,亦为后续学习两角的和与差做好铺垫.

教学环节 2:角的加减运算

问题 1:观察图 7 中有几个角,并判断它们之间的关系.

设计意图:引申教材内容,在“形”上强化两角的和与差,引导学生理解两角的和与差仍然是一个角.

问题 2:图 7 中 $\angle AOC = 48^\circ 30'$, $\angle AOB = 27^\circ 48'$,求 $\angle BOC$ 的度数.

设计意图:再次强调数形结合,引出两角差的概念及计算,同时分散度、分、秒的计算难度.

问题 3:把问题 2 进一步改编为“已知: $\angle AOC = 48^\circ 30'$, $\angle AOB = 27^\circ 48'$,求 $\angle BOC$ 的度数.”

设计意图:通过题目条件的自然衔接、变动,巧妙过渡到分类讨论,一方面训练了学生的发散思维,同时引入两角和的新知识点,在图 7 的基础上增加了第二种情况,如图 8 所示.师生共同解决问题,借助演算展示、书写纠错、过程剖析等,如图 9,实现两角的和与差、度分秒的计算、进位和借位、数与形四个方面的有机结合,全面提升学生观察类比、数学运算和逻辑推理的综合能力.

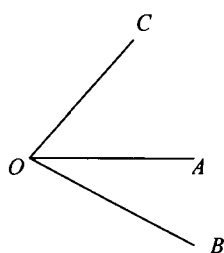


图 8

$$\begin{aligned}
 (1) \angle BOC &= \angle AOC - \angle AOB \\
 &= 48^\circ 30' - 27^\circ 48' \\
 &= 47^\circ 90' - 27^\circ 48' \\
 &= (47^\circ - 27^\circ) + (90' - 48') \\
 &= 20^\circ 42'.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \angle BOC &= \angle AOC + \angle AOB \\
 &= 48^\circ 30' + 27^\circ 48' \\
 &= 48^\circ 30' + 27^\circ 48' \\
 &= (48^\circ + 27^\circ) + (30' + 48') \\
 &= 75^\circ 78' \\
 &= 76^\circ 18'.
 \end{aligned}$$

图 9

例 1: 计算 $27^\circ 48' \div 2$.

$$\begin{aligned}
 \text{解法 1: } 27^\circ 48' \div 2 &= 26^\circ 108' \div 2 \\
 &= 13^\circ 54'.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法 2: } 27^\circ 48' \div 2 &= 13.5^\circ + 24' \\
 &= 13^\circ 30' + 24' \\
 &= 13^\circ 54'.
 \end{aligned}$$

图 10

问题 4: 用给定的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 还可以拼出来多少度数的角?

设计意图: 可以拼出 $2\angle 1$ 、 $3\angle 2$ 或 $2\angle 1 - \angle 2$ 等这两个角的任意代数和, 学生的思路彻底被打开, 在其求知欲望高涨、情绪亢奋之时, 强化角的和差倍的作图与计算. 同时, 教师适时地拔高引申: 如果作某个角一边的反向延长线, 即得该角的补角, 对应图 5 中所显示的例 1, 亦是下节课互补互余的前奏.

问题 5: 借助你常用的三角套尺, 可以如何画出 15° 、 75° 的角? 还能画出哪些度数的角?

设计意图: 把学生的思维从几何抽象拉回到现实情境, 从一般到特殊, 化理论上角的和差倍计算为三角尺的拼接操作, 既巩固了角的和差概念, 又培养了学生的动手能力, 有助于其直观感知角

的大小, 提升其估计角的大小的实践能力, 高效达成数学抽象、直观想象的学科核心素养^[7].

教学环节 3: 角的平分线

教学活动: 把事先准备好的两个角进行对折, 使得角的两边重合, 由折线引入角平分线的概念.

设计意图: 借助实物教具引出角平分线的定义, 这种具体操作可加深学生对数学概念的形象化理解, 也是对教材中探究活动的有效利用, 使得定义角的平分线、画角的平分线两个过程合二为一^[8], 教学活动更顺畅, 有事半功倍之效.

教学活动: 已知两个角可以求出角的和差倍, 怎样求已知角的一半的度数? 引出例 1: 计算 $27^\circ 48' \div 2$.

设计意图: 基于“由形到数”的思想设计新例题, 不仅继续让学生直接感知角的大小, 形成了关于角的和差倍分的完整类型, 而且对角的“分”专门做计算练习, 通过不同解法, 如图 10, 强调剖析计算的易错点, 分散化解运算难点, 切实提升学生的数学运算能力和数据分析能力.

教学活动: 类比角的平分线, 如何定义角的三等分线、四等分线, 甚至更高数量的其它等分线? 把一个周角分别进行二等分、三等分、四等分、五等分、六等分, 每一份应该是多少度?

设计意图: 培养学生的类比模仿能力, 把被等分的角从一般角具体到特殊的周角, 因为周角在以后的学习生活中更常见, 对周角的等分有更强的实用性, 很自然地过渡到下述例 2.

教学活动: 例 2: 把一个周角 7 等分, 每一份是多少度的角(精确到分)?

设计意图: 对于角度运算的这道经典题目, 为凸显除法运算的退位问题, 结合具体除的过程(可参见图 5 中的例 2), 辅以竖式运算, 如图 11 所示, 可引导学生清晰理解度的余数需要继续再除的情况, 退位过程更加直观.

$$\begin{array}{r}
 51 \\
 7 \overline{) 360} \\
 \underline{35} \\
 10 \\
 \underline{7} \\
 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 25 \\
 7 \overline{) 180} \\
 \underline{14} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 5
 \end{array}$$

图 11

(下转第 61 页)

假设每个顶点所在的“等圆三角形”至少有 $C_{k-1}^2 + \left[\frac{k+2}{2}\right] - \left[\frac{k+1}{2}\right] + 1$ 个, 每个“等圆三角形”至多被计算 3 次, 那么“等圆三角形”个数不少于 $\frac{k+1}{3} \left(C_{k-1}^2 + \left[\frac{k+2}{2}\right] - \left[\frac{k+1}{2}\right] + 1 \right)$ 个, 由 $\frac{k+1}{3} \cdot (C_{k-1}^2 + 1) - \left(C_k^3 + \frac{k+2}{2} \right) = \frac{1}{6} [k(k-4) - 2] > 0 (k \geq 5)$ 与已知有 $C_k^3 + \left[\frac{k+2}{2}\right]$ 个“等圆三角形”矛盾.

因此必存在一个顶点(不妨 A), 含该顶点的“等圆三角形”不超过 $C_{k-1}^2 + \left[\frac{k+2}{2}\right] - \left[\frac{k+1}{2}\right]$ 个, 那么剩下的 k 个顶点至少有 $C_k^3 + \left[\frac{k+2}{2}\right] - \left(C_{k-1}^2 + \left[\frac{k+2}{2}\right] - \left[\frac{k+1}{2}\right] \right) = C_{k-1}^3 + \left[\frac{k+1}{2}\right]$ 个“等圆三角形”, 由假设可知, 此 k 个顶点共圆.

含顶点 A 的“等圆三角形”恰有 $C_k^3 + \left[\frac{k+2}{2}\right] - C_k^3 = \left[\frac{k+2}{2}\right]$ 个, 每个“等圆三角形”中顶点 A 的对边, 一定在去掉顶点 A 剩下 k 个顶点围成的凸 k 边形中, $\left[\frac{k+2}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ 条边 k 个顶点, 必存在两条边交于一顶点(不妨 BC, BD), 由引理 2 可得点 A 与 B, C, D 四顶点共圆, 即顶点 A 与其余 k 个顶点共圆, 所以平面凸 $k+1$ 边形 $k+1$ 顶点共圆.

综合由(1)、(2)可知命题成立.

注: 由引理 3 的情况 4 可知 $C_{n-1}^3 + \left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个“等圆三角形”是最佳值.

完成二维条件下的探究和推广, 自然思考三维空间情况, 最后提出如下问题:

空间凸多面体有 n 个顶点, 任意四个顶点不共面, 经过每 4 个顶点确定一个球面, 这样得到 C_n^4 个球面(其中不排除重合), 问: 至少有多少个球相等时, 必有此 n 个顶点共球面.

(上接第 40 页)

教学环节 4: 综合提高

教学活动: 例 3: 已知: 如图 12, $\angle 1 = 48^\circ$, OD 是 $\angle AOC$ 的平分线, 求 $\angle BOD$ 的度数.

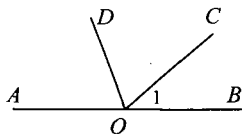


图 12

设计意图: 为综合运用本节课所有内容, 自行设计补充例题, 不同的解题思路既可以提高学生分析问题、解决问题的能力, 同时, 七年级的学生初学几何, 对逻辑推理以及相关的几何书写还较为生疏, 类似的综合训练可有效培养学生的几何素养.

教学环节 5: 小结与练习

教学活动: 师生共述, 本节课学习了哪些知识? 采取了什么样的学习方法? 还有哪些体会? 并布置课堂练习和课后作业.

设计目的: 强化学生的归纳和总结能力, 检查了解学生的吸收情况, 动态评价课堂效果.

教育界一直提倡“教学有法、教无定法”, 根据

不同的教学内容, 选取适合本校师生的相应具体方法, 窃以为教材是教学内容的“本”; 同样, 教学专家提出的“用教材教, 而不是教教材”, 窃以为很多教师尚未完全走出“教教材”的层面, 与课标修订、教材编写专家的期望和设想还有很大差距, 从“教教材”到“用教材教”的首要前提是“教好教材”, 其间的路还很漫长.

参考文献

- [1] 吴维维, 邵光华. 逻辑推理核心素养在小学数学课堂如何落地[J]. 课程·教材·教法, 2019, 39(03): 88-95
- [2] 李树臣, 程强. 数学教学的第一要务: 认真研读教材——例谈研读数学教材的三个环节[J]. 中学数学杂志, 2019(06): 1-5
- [3] 罗宇婧. 从“教教材”到“用教材”的转变[J]. 上海中学数学, 2018(09): 4-6+35
- [4] 韩方廷. 新课标下初中数学课堂教学有效性策略分析[J]. 中国教育旬刊, 2019(S1): 54-56
- [5] 孙宽宁. 我国教学设计研究 40 年审视与展望[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(11): 39-45.
- [6] 张曜光. 以数学教育的整体观把握数学学科核心素养[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(07): 67-72
- [7] 王钦敏, 余明芳. 数学探究式教学的目标定位与路径选择[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(04): 59-63
- [8] 课程教材研究所编著. 义务教育课程标准实验教科书教师教学用书(数学七年级上册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2015