

一道情境化探究性试题的命制过程

金山 (江苏省启东中学 226200)

《普通高中数学课程标准(2017版)》(以下简称《课标》)指出:“命题应依据课程内容,注重对学生数学学科核心素养的考查,处理好数学学科核心素养与知识技能的关系,要充分考虑对教学的积极引导作用.”“命题时,应有一定量的应用问题,还应包括开放性问题 and 探索性问题,重点考查学生的思维过程、实践能力和创新意识,问题情境的设计应自然、合理.”合适的问题情境是考查数学学科核心素养的重要载体,数学命题时,应注意选取问题情境,这里的情境包括现实情境、数学情境和科学情境.学生在解决这类问题时,首先要对情境进行抽象,建立合理的数学模型,其次需要依靠科学的方法进行探究、推理、演算.解题的过程成为分析和解决问题的过程,这有利于真正区分学生的数学能力和数学核心素养.笔者在参加2021年南通市第二次数学调研测试命题期间,经历了一道探究性情境试题几经周折的编制过程,简单总结如下,与大家分享交流.

1 问题情境的溯源

《课标》是联考和模考命题的基本依据,教材则是改编试题的最好素材来源.在《课标》的附录2“教学与评价案例”中共列出了37个案例,其中案例15和案例19都是测量建筑物高度的问题.教材中也出现很多实际测量的情境,例如:

问题1 (苏教版(2020)数学必修第二册第99页第4题)如图1,某人在高出海面600 m的山上P处,测得海面上的航标A在正东方向,俯角为 30° ,航标B在南偏东 60° 的方向上,俯角为 45° ,求这两个航标间的距离.

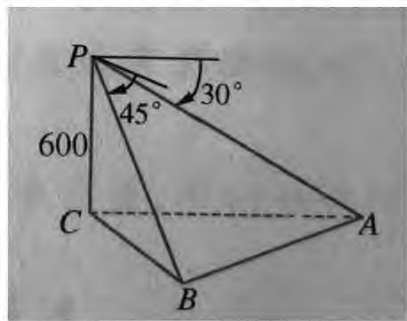


图1

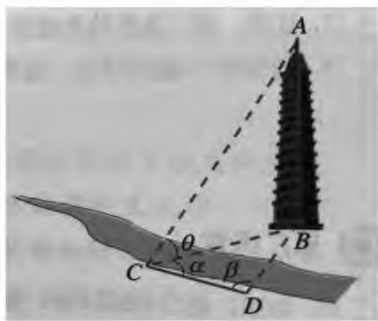


图2

问题2 (人教版(2019)数学必修第二册第53页第8题)如图2,测量河对岸的塔高AB时,可以选取与塔底B在同一水平面的两个测量基点C

与D.现测得 $\angle BCD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $CD = s$,在点C测得塔顶A的仰角为 θ ,求塔高AB.

这两道试题都来源于生产生活实际,研究的是不同情境下同一类型的实际测量问题,体现了数学与生活的密切关联,具有浓厚的现实意义.

对于问题1,先解 $Rt\triangle PAC$ 和 $Rt\triangle PBC$,求出AC,BC长.在 $\triangle ABC$ 中,已知“两边及其夹角”,运用余弦定理可求出A,B间的距离.再看问题2,在 $\triangle BCD$ 中,由已测得的 $\angle BCD$, $\angle BDC$ 和CD长,根据正弦定理计算出BC长.在 $Rt\triangle ABC$ 中,由 θ 角的正切即可算出塔高AB.

两个问题中,需要测量的量与所求量都可归结到三棱锥模型中:测得三个角大小和一条棱长,求另一棱长.那么,这类问题都可解吗?即,已知三个角与一条棱长可以确定这个三棱锥的形状与大小吗?如果不能,哪些情形可解?哪些情形不可解?以上面的实际情境和疑问为源头,剔除具体计算,滤出其中的定性元素,能不能设置一道探究性的开放题呢?

2 命题意图的确立

以问题2的情境为例,对于一名测量者,测量之前首先要考虑“哪些量可测”.该情境下,C与D之间的距离s和以C,D为顶点的所有角都可测.其次会思考“测出哪些量就可以了”,这就需要具备一定的空间想象能力和对三角形可解性的深刻理解,还要具有一定的数据处理、运算求解的数学素养和科学决策能力.

从“测出哪些量就可以了”出发,命题组将教材中的这个情境改编成一道开放的填空题.

初稿 如图3,某校测绘兴趣小组测量河对岸的塔高AB,选取与塔底B在同一水平面内的两点C与D(B,C,D 不在同一直线上),并测得CD长.若该测绘兴趣小组利用测角仪可测得以C,D为顶点的所有角,则只需测出 _____,

_____, _____ 这三个角就可计算出塔AB的高

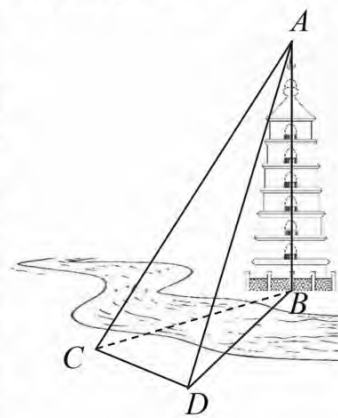


图3

度.(写出一组即可)

《课标》指出:“在命制应用问题、开放性问题、探究性问题时,要注意公平性和阅卷的可操作性.”初稿中,将问题改编成了一道探究性开放试题,但以 C, D 为顶点的 6 个角中选择 3 个,共有 $C_6^3 = 20$ 种不同填法,而且每个角都要用 3 个大写字母表示.如果是课堂上让学生探究,不失为一个培养思维能力的好素材,但作为考试试题,阅卷的难度太大,不适合!那么,能否改成选择题呢?若改成选择题,选项如何设置?

3 问题的进一步探究

以 C, D 为顶点的可测角中,6 选 3,共 20 种不同方法.若考虑到 C, D 两点的地位等同,两个等价条件取其一,则只需研究其中 10 种不同选法,它们可分为两类:第一类,取同一顶点处三个角(以下取点 C),有 $C_3^3 = 1$ 种;第二类,有两个角顶点相同(以下取点 C),第三个角顶点不同(以下取点 D),有 $C_3^2 \cdot C_3^1 = 9$ 种.

如图 4,在平面 BCD 中,过点 B 作 $BE \perp CD$,垂足为 E ,连结 AE .因为 $AB \perp$ 平面 BCD ,所以 $AE \perp CD$.因为 $\cos \angle BCD = \frac{CE}{BC}$, $\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC}$,

$\cos \angle ACD = \frac{CE}{AC}$,所以

$\cos \angle BCD \cdot \cos \angle ACB = \cos \angle ACD$.即在 $\angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$ 中两个角确定,则第三角也确定,这就是“三余弦定理”.(源自苏教版(2012)数学选修 2-2 第 113 页第 10 题)

因此,在第二类的 9 种选法中,从三余弦定理角度考虑,以 C 为顶点的三个角取两个,只需考虑一种(以下取 $\angle ACB, \angle BCD$),即第二类只讨论 $1 \times C_3^2 = 3$ 种选法.

综合以上分析,20 种选择方法实质只需研究其中 4 种.那么在这 4 种方案中,哪些可以确定塔高 AB 呢?

方案 1 $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$.

由三余弦定理, $\angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$ 这三个角中已知两个就可以求出第三个角,所以该方案条件出现了重复,实际上只有三个条件,可用如下作图过程说明塔高不确定.

如图 5,将塔 AB 沿着 $\overrightarrow{CB}$ 方向移动至 $A'B'$

的位置,在不改变 $\angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$ 以及 CD 长的情况下,塔高可以是 AB 长,也可以是 $A'B'$ 长,因此方案 1 中四个条件不能确定塔高 AB .

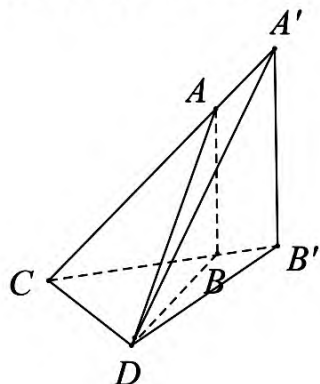


图 5

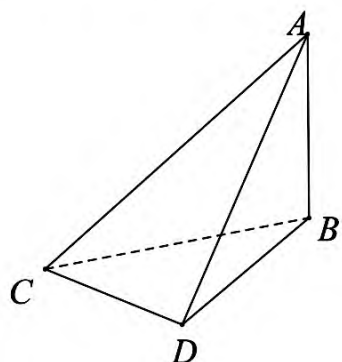


图 6

方案 2 $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$.

定性分析: $\triangle BCD$ 中,已知“两角及其夹边”,根据“角边角”公理,边 BC 确定,从而在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中可确定 AB .

定量分析:如图 6,在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{s}{\sin \angle CBD}$,故 $BC = \frac{\sin \angle BDC}{\sin \angle CBD} \cdot s = \frac{\sin \angle BDC}{\sin(\angle BCD + \angle BDC)} \cdot s$.

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC \cdot \tan \angle ACB = \frac{\sin \angle BDC \cdot \tan \angle ACB}{\sin(\angle BCD + \angle BDC)} \cdot s$.

方案 3 $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADC$.

定性分析:由三余弦定理, $\angle ACB, \angle BCD$ 确定了 $\angle ACD$ 的大小,所以在 $\triangle ACD$ 中,已知“两角及其夹边”,根据“角边角”公理,边 AC 确定,从而在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中可确定 AB .

定量分析:如图 6,在 $\triangle ACD$ 中由正弦定理得 $AC = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle CAD} \cdot s = \frac{\sin \angle ADC}{\sin(\angle ADC + \angle ACD)} \cdot s$,

$AB = AC \cdot \sin \angle ACB = \frac{\sin \angle ADC \cdot \sin \angle ACB}{\sin(\angle ADC + \angle ACD)} \cdot s$,其中 $\cos \angle BCD \cdot \cos \angle ACB = \cos \angle ACD$.

方案 4 $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADB$.

若 AB 确定,因为 $BC = \frac{AB}{\tan \angle ACB}$, $BD = \frac{AB}{\tan \angle ADB}$,所以 BC 和 BD 确定.在 $\triangle BCD$ 中,已知 $\angle BCD$ 的对边 BD 和邻边 BC ,即“两边及其中一边的对角”,三角形不能确定,可用如下作图过程说明,所以该方案不可行.

如图 7,在三棱锥 $A-BCD$ 中,已知 $CD = s$, $\angle ACB, \angle BCD, \angle ADB$.过点 B 作 $BE \parallel CD$,当 $\angle BDC \neq 90^\circ$ 时,过点 D 作 $DM \perp BE$,垂足为 M ,取 $ME = BM$,过点 E 作 $EF \perp$ 面 BCD ,且 $EF =$

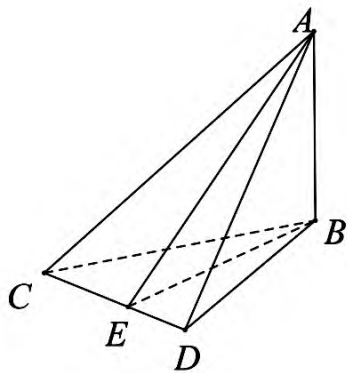


图 4

AB , 则 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle DEF$. 因为四边形 $ABEF$ 是平行四边形, 所以 $AF \parallel CD$, 即 C, D, A, F 共面. 延长 DF 与 CA 交于点 A' , 延长 DE 与 CB 交于点 B' , 则在三棱锥 $A'-B'CD$ 中, $CD=s$ 和 $\angle A'CB' = \angle ACB, \angle B'CD = \angle BCD, \angle A'DB' = \angle ADB$, 所以塔高 AB 不确定.

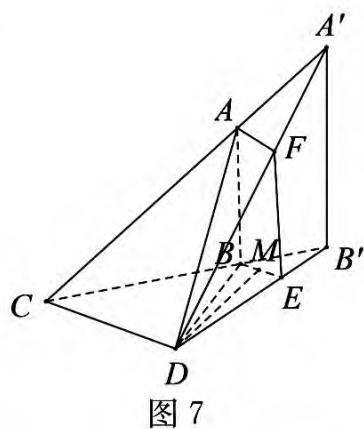


图 7

4 试题的修改与完善

四种方案中, 方案 2 和 3 可以确定塔高, 方案 1 和 4 不能确定. 基于以上分析, 将初稿中的填空题修改成下面的单项选择题.

第 2 稿 如图 3, 某校测绘兴趣小组为测量河对岸直塔 AB (A 为塔顶, B 为塔底) 的高度, 选取与 B 在同一水平面内的两点 C 与 D (B, C, D 不在同一直线上), 测得 CD 长为 s . 测绘兴趣小组利用测角仪可测得的角有: $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADB, \angle ADC, \angle BDC$, 则根据下列各组中的测量数据可计算出塔 AB 的高度的是().

- A. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$
- B. $s, \angle ADB, \angle BDC, \angle ADC$
- C. $s, \angle ACB, \angle ACD, \angle BCD$
- D. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADB$

改成单选题后, 难度减小, 对学生的数学思维和数学素养的考查力度大大降低. 第 2 稿与初稿比较, 虽然解决了阅卷的困难, 但试题的灵动性与开放性明显降低, 违背了初始确立的命题意图. 为了尽量保留初稿的探究意境, 达成当初的命题意图, 在第 2 稿的基础上, 进一步修改成多项选择题.

第 3 稿 如图 3, 某校测绘兴趣小组为测量河对岸直塔 AB (A 为塔顶, B 为塔底) 的高度, 选取与 B 在同一水平面内的两点 C 与 D (B, C, D 不在同一直线上), 测得 CD 长为 s . 测绘兴趣小组利用测角仪可测得的角有: $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADB, \angle ADC, \angle BDC$, 则根据下列各组中的测量数据可计算出塔 AB 的高度的是().

- A. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$
- B. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$
- C. $s, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC$
- D. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADB$

确立以多项选择题形式呈现后, 试题的开放性、探究性提高, 可难度适合吗? 第 3 稿中设置的

4 个选项包揽了此类问题的 4 种方案, 其中方案 4 (选项 D) 讨论的是三角形不可解性, 也是最困难的一种, 预估学生在考试时间内很难完成, 基于此, 最终“忍痛割舍”方案 4, 修改如下.

定稿 如图 3, 某校测绘兴趣小组为测量河对岸直塔 AB (A 为塔顶, B 为塔底) 的高度, 选取与 B 在同一水平面内的两点 C 与 D (B, C, D 不在同一直线上), 测得 CD 长. 测绘兴趣小组利用测角仪可测得的角有: $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADB, \angle ADC, \angle BDC$, 则根据下列各组中的测量数据可计算出塔 AB 的高度的是().

- A. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$
- B. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$
- C. $s, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC$
- D. $s, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADC$

终稿中, 选项 C 和选项 D, 从三余弦定理角度看是等价的.

5 考试结果及反思

高三复习阶段的考试, 目的是合理评价学生数学思维能和素养的水平, 诊断课堂教学的效果, 反馈教与学中的经验和不足, 激励学生探究未知的激情和学习数学的兴趣. 本题预设难度是 0.35 至 0.4 之间, 实际考试结果看, 南通市考生均分 1.9 分, 难度系数 0.62, 很好地达到了检查学生复习效果、评价学生数学思维的目的, 获得了一线教师的肯定与好评, 为下一步教学实践提供了参考依据.

本题设置的情境是“测量建筑物高度”, 来源于《课标》和教材, 体现了《课标》对考试评价的指导地位, 体现了教材中典型问题的内在价值与迁移功能. 同时, 所选情境与学生生活关系密切, 是学生熟悉的, 保证了试题评价的公平性. 学生在解决问题的过程中感受到数学学习的价值, 能提高学习数学和对劳动实践的兴趣, 增强主动运用数学知识的意识和能力, 对培养学生探究未知的精神起到积极的引导作用.

本题的命题意图是“探究、开放”. 我们对问题原型不断加工, 除去具体的解三角形的计算, 重点考查对空间图形的想象、三角形可解的充分条件的探究, 是问题可解析的定性分析. 终稿的呈现形式具备应用与创新、探究与开放的新高考气息, 能达到区分学生思维的灵活性与创新性的考查目标, 与新高考命题的方向基本吻合.

回顾本题从萌芽、雏形、成长到成熟, 我们经历不断尝试、合作、探索、打磨, 虽然过程艰辛, 却充满了收获的快乐.