多角度理解和运用圆锥曲线性质

方立新 （江苏省扬中市第二高级中学 212200）
刘新春 （江苏省扬中高级中学 212200）

圆锥曲线有许多重要性质，全方位、多角度、整体性地深刻理解这些性质既是学好数学的必然要求，也是提升数学能力和素养的基本载体.

1 理解圆锥曲线性质的本质特征

圆锥曲线有许多重要性质，它们既揭示了圆锥曲线的各种规律，又为进一步运用圆锥曲线知识解决问题拓展了思维，也提供了有力工具.以下我们从一个性质出发，说明如何从多角度理解运用圆锥曲线的性质.椭圆上异于长轴两端点的任一点与两端点连线的斜率（不妨假设斜率存在）之积等于 $-\frac{b^2}{a^2}$. 这个性质应用广泛，但学生在解决解析几何问题时往往不是想不到就是想到性质也用不上，原因就在于对这个性质没有全方位的认识和理解.首先，这个性质是如何发现的？如果我们从特殊出发，考虑椭圆的特殊情形——圆，就能想到圆具有一个重要性质：圆的直径所对的圆周角是直角；换句话说，圆上任意一点到直径两个端点的连线的斜率（假设存在）之积为常数 -1.而椭圆的长轴容易类比圆的直径，自然想到椭圆是否具有相似性质，并推广到经过椭圆中心的任一条弦.若从椭圆方程的角度思考这一性质，又可以从以下变形过程获得启示：

将椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 变形可得 $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$，当 $x\neq\pm a$ 时，再变形为 $\frac{y^2}{x^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$，即 $\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=-\frac{b^2}{a^2}$.此式可看作"椭圆上异于长轴两端点的任一点与两端点连线的斜率之积等于 $-\frac{b^2}{a^2}$".事实上，设 AB 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的任意一条过中心的弦，点 P 为椭圆上异于 A，B 的任意一点，若直线 PA，PB 的斜率存在，记为 k_1，k_2，则 $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

证明 设 $A(x_1,y_1)$，$B(-x_1,-y_1)$，$P(x_2,y_2)$，由题意可知 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，则 $k_1k_2=k_{PA}k_{PB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}(1-x_2^2)-\frac{b^2}{a^2}(1-x_1^2)}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{b^2}{a^2}$.

这是椭圆的一个重要性质，双曲线也有类似的性质（略）.以上从数量关系上揭示了椭圆的本质规律，其实圆锥曲线的性质并不是孤立的、一成不变的结论，而是动态的、联系的、可以拓展的.事实上，上述椭圆性质的逆命题也成立，即：

过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 作两条直线交椭圆 C 于 A，B 两点.若 PA，PB 的斜率存在，设为 k_1，k_2，且 $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$，则直线 AB 经过椭圆 C 的中心.

证明 设直线 PA 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，联立方程组 $\begin{cases}y=kx+(y_0-kx_0)，& ①\\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. & ②\end{cases}$

将①代入②，得 $(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2k(y-kx_0)x+a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2=0$，设方程的另一根为 x_A，则 $x_Ax_0=\frac{a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}=(a^2y_0^2-2a^2kx_0y_0+a^2k^2x_0^2-a^2b^2)/(b^2+a^2k^2)=\left[a^2\left(-\frac{b^2}{a^2}x_0^2\right)-2a^2kx_0y_0+a^2k^2x_0^2\right]\Big/(b^2+a^2k^2)=[(a^2k^2-b^2)x_0^2-2a^2kx_0y_0]/(b^2+a^2k^2)$，所以 $x_A=\frac{(a^2k^2-b^2)x_0-2a^2ky_0}{b^2+a^2k^2}$.将上式中的 k 换成 $-\frac{b^2}{a^2k}$，则有 $x_B=\frac{(b^2-a^2k^2)x_0+2a^2ky_0}{b^2+a^2k^2}=-x_A$. 同理，$y_B=-y_A$，所以结论成立.

无独有偶，还有一个与这个性质相似的性质：已知 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的任一弦，AB 的中点为 M，O 为坐标原点，若直线 AB，OM 的斜率存在，则 $k_{AB}k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$.

证明　设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,由题意得 $\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2.\end{cases}$ 两式相减,得 $b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$,变形得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$,即 $k_{AB}k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$.

当 AB 平行移动时,AB 的中点 M 在一条直线上,当直线 AB 经过原点时,把 AB 与点 M 的轨迹(经过原点的一条线段)叫做共轭直径.上述结论又可表述为:椭圆的任一对经过中心的共轭直径的斜率之积等于 $-\frac{b^2}{a^2}$.这是对"$-\frac{b^2}{a^2}$"的又一解释.当上述结论中的弦变成切线时,有:过椭圆上任一点 P 的切线的斜率与这点到中心连线的斜率之积等于 $-\frac{b^2}{a^2}$(以上均假设斜率存在).对比椭圆的定义:到两个定点的距离之和为定值(大于两定点间的距离)的点的集合为椭圆.以及椭圆性质:椭圆上任意一点与中心弦端点的连线斜率之积为定值.这三者都揭示了椭圆上的点满足的本质规律,且两个性质本质相同.

2　领悟圆锥曲线性质的探究方法

椭圆的上述性质证明与以下结论的证明具有密切的联系:若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两点,则 $(b^2x_1x_2+a^2y_1y_2)^2+a^2b^2(x_1y_2-x_2y_1)^2=a^4b^4$ 成立.联想在证明椭圆的性质时采用了点差法——即把点的坐标代入方程作差,用坐标表示斜率.观察以上等式,若展开则会出现 $x_1^2x_2^2$,$y_1^2y_2^2$,$x_1^2y_2^2$,$x_2^2y_1^2$ 等项.联想 A,B 两点在椭圆上,有 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,采用点乘法即两式相乘会出现上述各项,从而得到以下证明.

证明　因为 A,B 两点在椭圆上,有 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,即 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$ ①,$b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2$ ②.两式相乘,得 $(b^2x_1^2+a^2y_1^2)(b^2x_2^2+a^2y_2^2)=a^4b^4$,展开得 $b^4x_1^2x_2^2+a^4y_1^2y_2^2+a^2b^2x_1^2y_2^2+a^2b^2x_2^2y_1^2=a^4b^4$,配方后即有 $(b^2x_1x_2+a^2y_1y_2)^2+a^2b^2(x_1y_2-x_2y_1)^2=a^4b^4$ (*).

以上结论揭示了椭圆上两点与椭圆中心连线构成的三角形面积与中心弦斜率乘积之间的关系,与椭圆性质的证明采取了类似的方法——点差法和点乘法.应用此结论和椭圆的性质可以解决许多与三角形面积、直线斜率等相关的问题.

例 1　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两点 M,N.若射线 OM,ON 的斜率分别为 k_{OM},k_{ON},且 $k_{OM}k_{ON}=-\frac{b^2}{a^2}$,求证:$\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab$.

证明　设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $k_{OM}k_{ON}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$,整理得 $b^2x_1x_2+a^2y_1y_2=0$.又 $OM=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$,点 N 到直线 OM:$y_1x-x_1y=0$ 的距离 $d=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$,所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM\cdot d=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{2}$,代入(*)式即得 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}ab$.

从以上证明过程可以得到此时 $\triangle OMN$ 的面积取得最大值,且其逆命题也成立,即:若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两点 M,N 与坐标原点 O 组成的三角形面积为 $\frac{1}{2}ab$,则射线 OM,ON 的斜率(存在)之积 $k_{OM}k_{ON}=-\frac{b^2}{a^2}$.(证略)

3　掌握圆锥曲线性质的应用策略

同一个知识可能有多种表征形式,而且常常与相对应的方法脱节,在解决问题的过程中往往不能准确快捷地采用相对简捷的方法.我们的策略是,面对待解决的问题,多角度联想概念性质,多形式表征条件结论,多方法简化解题过程,通过观察、比较、尝试、选择获得问题解决.

例 2　(2011 年山东高考数学试题理科第 22 题)已知动直线 l 与椭圆 C:$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$ 两不同的点,且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,其中 O 为坐标原点.(1)证明:$x_1^2+x_2^2$ 和 $y_1^2+y_2^2$ 均为定值;(2)(3)(略).

此试题原解法如下:(1)当直线 l 的斜率不存在时,P,Q 两点关于 x 轴对称,所以 $x_2=x_1$,$y_2=-y_1$.因为 P 在椭圆上,所以 $\frac{x_1^2}{3}+\frac{y_1^2}{2}=1$ ①.又因为 $S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $|x_1||y_1|=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ②.由①②得 $|x_1|=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$|y_1|=1$,此时 $x_1^2+x_2^2=3$,$y_1^2+y_2^2=2$.当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+m$.由题意

知 $m\neq 0$,将其代入$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$,得$(2+3k^2)x^2+6mkx+3(m^2-2)=0$,其中 $\Delta>0$,由此整理$3k^2+2>m^2$③.又 $x_1+x_2=\frac{6mk}{2+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{3(m^2-2)}{2+3k^2}$,所以 $PQ=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3k^2+2-m^2}}{2+3k^2}$.因为点 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}PQ\cdot d=\frac{\sqrt{6}|m|\sqrt{3k^2+2-m^2}}{2+3k^2}$.又 $S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,整理得 $3k^2+2=2m^2$,且符合③式,此时 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{6mk}{2+3k^2}\right)^2-2\times\frac{3(m^2-2)}{2+3k^2}=3$,$y_1^2+y_2^2=\frac{2}{3}(3-x_1^2)+\frac{2}{3}(3-x_2^2)=4-\frac{2}{3}\cdot(x_1^2+x_2^2)=2$.综上所述,$x_1^2+x_2^2=3$,$y_1^2+y_2^2=2$,结论成立.

若观察本题条件与结论,由条件$\triangle OPQ$的面积 $S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,联想结论$(b^2x_1x_2+a^2y_1y_2)^2+a^2b^2(x_1y_2-x_2y_1)^2=a^4b^4$,代入可得$(2x_1x_2+3y_1y_2)^2+3\times 2\left(4\times\frac{6}{4}\right)=3^2\times 2^2$,化简得$2x_1x_2+3y_1y_2=0$,即$2x_1x_2=-3y_1y_2$.两边平方消去 y_1 与 y_2,得$4x_1^2x_2^2=9y_1^2y_2^2=3y_1^2\cdot 3y_2^2=(6-2x_1^2)(6-2x_2^2)=36-12(x_1^2+x_2^2)+4x_1^2x_2^2$,化简即得 $x_1^2+x_2^2=3$.同理可得 $y_1^2+y_2^2=2$.

以上结论还可以推广到一般椭圆的情况.对比以上两种解法,不难发现已知结论的作用.

例3　如图1,椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左顶点为 A,过原点 O 的直线 l(与坐标轴不重合)与椭圆 C 交于 P,Q 两点,直线 PA,QA 分别与 y 轴交于 M,N 两点,试问以 MN 为直径的圆是否过定点?并证明你的结论.

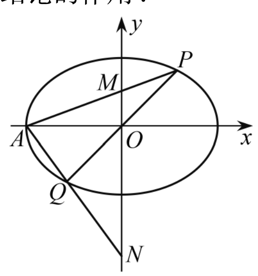

图1

常规解法如下:

证法1　设直线 AP:$y=k(x+2)$,代入椭圆方程,得$(2k^2+1)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$,显然 $\Delta>0$,由韦达定理得 $x_Ax_P=\frac{8k^2-4}{2k^2+1}$,故 $x_P=\frac{2-4k^2}{2k^2+1}$,则 $y_P=\frac{4k}{2k^2+1}$,即 $P\left(\frac{2-4k^2}{2k^2+1},\frac{4k}{2k^2+1}\right)$,则 $Q\left(-\frac{2-4k^2}{2k^2+1},-\frac{4k}{2k^2+1}\right)$,于是 $k_{AQ}=\frac{y_Q-y_A}{x_Q-x_A}=-\frac{1}{2k}$,直线 AQ:$y=-\frac{1}{2k}(x+2)$,则 $N\left(0,-\frac{1}{k}\right)$.又易得 $M(0,2k)$,则以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2+(y-2k)\left(y+\frac{1}{k}\right)=0$,即 $x^2+y^2+\left(\frac{1}{k}-2k\right)y-2=0$.若圆过定点,则方程对变量 k 恒成立,故$\begin{cases}y=0,\\x^2+y^2-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\pm\sqrt{2},\\y=0.\end{cases}$故圆过定点$\left(\pm\sqrt{2},0\right)$.

证法2　设 $M(0,m)$.由 $A(-2,0)$,则直线 AM:$y=\frac{m}{2}(x+2)$,联立椭圆方程解得 $x_P=-\frac{2m^2-4}{m^2+2}$,则 $y_P=\frac{4m}{m^2+2}$,即 $P\left(\frac{2m^2-4}{m^2+2},\frac{4m}{m^2+2}\right)$,则 $Q\left(-\frac{2m^2-4}{m^2+2},-\frac{4m}{m^2+2}\right)$,于是 $k_{AQ}=\frac{y_Q-y_A}{x_Q-x_A}=-\frac{1}{m}$,所以直线 AQ:$y=-\frac{1}{m}(x+2)$,则 $N\left(0,-\frac{2}{m}\right)$,故以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2+(y-m)\left(y+\frac{2}{m}\right)=0$,即 $x^2+y^2+\left(\frac{2}{m}-m\right)y-2=0$.若圆过定点,则方程对变量 m 恒成立,同证法1,知圆过定点$(\pm\sqrt{2},0)$.

以上两种方法采用“直译法”按部就班求出点 M,N 的坐标,再求出圆的方程,运算量大,过程繁杂,原因是没有发现题目条件与椭圆性质的本质联系.如果直接假设 M,N 的坐标再运用中心弦的性质,则可以获得更简捷的方法:

证明　设 $M(0,m)$,$N(0,n)$,$P(x_0,y_0)$,$Q(-x_0,-y_0)$.由 A,M,P 三点共线以及 A,N,Q 三点共线知 $k_{AM}=k_{AP}$,$k_{AN}=k_{AQ}$,从而 $k_{AM}k_{AN}=k_{AP}k_{AQ}$.因为 $k_{AM}k_{AN}=\frac{m}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{mn}{4}$,$k_{AP}k_{AQ}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{-y_0}{-x_0+2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{1}{2}$,故 $mn=-2$,则以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2+(y-m)(y-n)=0$,即 $x^2+y^2-(m+n)y-2=0$.若圆过定点,则方程对变量 m,n 恒成立,故$\begin{cases}y=0,\\x^2+y^2-2=0,\end{cases}$故圆过定点$(\pm\sqrt{2},0)$.