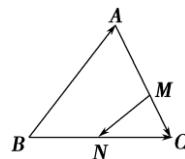


平面向量

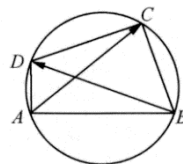
1. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\vec{AM} = 2\vec{MC}$, $\vec{BN} = \vec{NC}$. 若 $\vec{MN} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $x =$ _____; $y =$ _____.



2. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\vec{AF} \cdot \vec{BC}$ 的值为_____.

3. 如图, 在圆的内接四边形 $ABCD$ 中, 已知对角线 BD 为圆的直径, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, $AD = 1$, 则

$\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ 的值为_____.



4. 已知在等边三角形 ABC 中, 点 P 为线段 AB 上一点, 且 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} (0 \leq \lambda \leq 1)$.

(1) 若等边三角形边长为 6, 且 $\lambda = \frac{1}{3}$, 求 $\vec{CP}$;

(2) 若 $\vec{CP} \cdot \vec{AB} \geq \vec{PA} \cdot \vec{PB}$, 求实数 λ 的取值范围.

1. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6};$

2. $\frac{1}{8};$

3. 【答案】 $-\frac{40}{9}.$

【解析】 以 AB, AD 所在的直线为 x, y 轴建立平面直角坐标系 xAy ,

则 $A(0,0), B(2\sqrt{2},0), D(0,1).$

设 $C(x,y)$, 则 $AC^2 = x^2 + y^2 = 8, ①$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD} = (x - 2\sqrt{2})x + y(y + 1) = 0, ②$$

$$\text{联立①②得: } 2\sqrt{2}x + y = 8, ③$$

将③代入①得 $x = \frac{14\sqrt{2}}{9}$ 或 $x = 2\sqrt{2}$ (舍),

所以 $C(\frac{14\sqrt{2}}{9}, \frac{16}{9})$. 所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{40}{9}.$

4. 解: (1) 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CP}^2 = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP})^2 = \overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}^2 = 6^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 = 28.$$

$$\therefore |\overrightarrow{CP}| = 2\sqrt{7} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 设等边三角形的边长为 a , 则

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}a^2 + \lambda a^2,$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) = \lambda \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{AB}) = -\lambda a^2 + \lambda^2 a^2 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{即 } -\frac{1}{2}a^2 + \lambda a^2 \geq -\lambda a^2 + \lambda^2 a^2, \therefore \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} \leq 0, \therefore \frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又 } 0 \leq \lambda \leq 1, \therefore \frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq 1. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

