江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学周六试卷（2020.12.31）

一、单选题(共 40 分)

1. 设全集为 R,集合$A=\left\{x\left|\frac{2-x}{x}>0\right.\right\}$,B={x|x≥1},则 A∩B 等于(　　)

A.{x|0<x≤1}　　B.{x|0<x<1}　　C.{x|1≤x<2}　　D.{x|0<x<2}

2.复平面内表示复数$z=\dfrac{6+2i}{2-i}$的点位于(　　)

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

3.若$m=\log_3\dfrac{1}{2}, n=7^{0.1}$, $p=\log_4 25$则 m,n,p 的大小关系为(　　)

A.$m>p>n$　　B.$p>n>m$　　C.$p>m>n$　　D.$n>p>m$

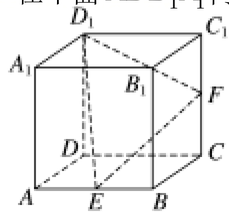
4. 已知$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，且$0<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{3\pi}{4}$，则$\sin\beta=$(　　)

A. $\dfrac{9\sqrt{15}}{35}$　B. $\dfrac{11\sqrt{10}}{35}$　C. $\dfrac{\sqrt{15}}{35}$　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{35}$

5.如图,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F 分别为棱 AB，CC_1的中点，在平面ADD_1A_1内且与平面D_1EF平行的直线(　　)

A.不存在　　B.有 1 条

C.有 2 条　　D.有无数条



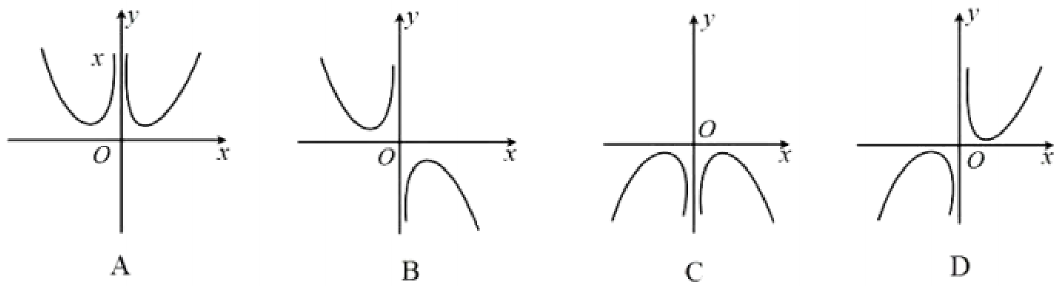
6. 琵琶、二胡、编钟、箫笛、瑟、琴、埙、笙和鼓这十种民族乐器被称为“中国古代十大乐器”．为弘扬中国传统文化，某校以这十种乐器为题材，在周末学生兴趣活动中开展了“中国古代乐器”知识讲座，共连续安排八节课，一节课只讲一种乐器，一种乐器最多安排一节课，则琵琶、二胡、编钟一定安排，且这三种乐器互不相邻的概率为(　　)

A. $\dfrac{1}{360}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{7}{15}$　　D. $\dfrac{1}{15}$

7. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3a_{11}=4a_7$，数列$\{b_n\}$是等差数列，且$b_7=a_7$，则$b_3+b_{11}=$(　　)

A.3　　B.6　　C.7　　D.8

8.函数$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}$的图象大致为(　　)



二、多选题(共 20 分)

9.将函数 f(x)=sin3x 的图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数 g(x)的图象,则（　　）

A.g(x)在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最小值为 0　　B.g(x)在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最小值为-1

C.g(x)在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值为 0　　D.g(x)在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值为 1

10．下列命题正确的是(　　)

A.命题"$\exists x_0\in(0,+\infty),\ln x_0=x_0-1$"的否定是"$\forall x\in(0,+\infty)$, $\ln x\neq x-1$"

B.“$a>1$”是“$\dfrac{1}{a}<1$”的充分不必要条件

C.若 $a, b\in R$, 则$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$

D.已知直线 $l\perp$平面 α, 直线 n//平面 β, 则“α//β”是“$l\perp n$”的必要不充分条件

11. 已知曲线 C：$\dfrac{x^2}{m^2+2}+\dfrac{y^2}{m}=1(m\in R)$，则下列结论正确的是(　　)

A．若 $m<0$，则曲线 C 表示双曲线　　B．曲线 C 可能表示一个圆

C．若曲线 C 是椭圆，则其长轴长为$2\sqrt{m}$　　D．若 $m=1$，则曲线 C 中过焦点的最短弦长为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

12.某地区城乡居民储蓄存款年底余额（单位：亿元）变化情况如图所示，下列判断一定正确的是（　　）

A.该地区城乡居民储蓄存款年底余额总数逐年上升
B.到 2019 年农村居民存款年底总余额已超过了城镇居民存款年底总余额
C.城镇居民存款年底余额逐年下降
D.2017 年城乡居民存款年底余额增长率大约为 225%

三、填空题(共 20 分)

13.在$(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x})^6$二项式展开式中，常数项为_______.

14.抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线截圆$x^2+y^2-2y-8=0$所得弦长为 4，则抛物线的焦点坐标为_______.

15.已知锐角 α、β 满足 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\dfrac{9}{\sin\alpha\cos\beta}+\dfrac{1}{\cos\alpha\sin\beta}$ 的最小值为_______.

16.四棱锥 P-ABCD 各顶点都在球心为 O 的球面上，且 PA 丄平面 ABCD，底面 ABCD 为矩形，PA=AB=2，AD=4，则球 O 的体积是_______，设 E、F 分别是 PB、BC 中点，则平面 AEF 被球 O 所截得的截面面积为_____.(本题第一空 2 分，第 2 空 3 分)

四、解答题(共 70 分)

17.（10 分）已知 $\triangle ABC$ 同时满足下列四个条件中的三个：

① $A=\dfrac{\pi}{3}$；② $\cos B=-\dfrac{2}{3}$；③ $a=7$；④ $b=3$.

（1）请指出这三个条件，并说明理由；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积.

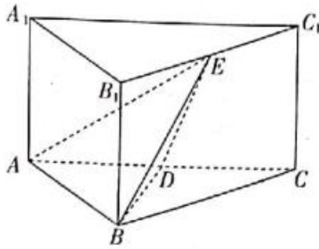
18.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=256$，$a_{n+1}=3S_n+16$.

（1）求 a_n；（2）若 $b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_n}$，数列 $\{b_nb_{n+2}\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\dfrac{5}{48}$.

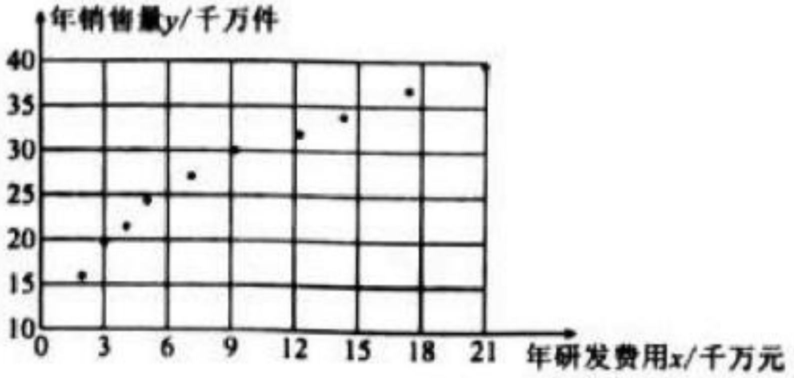
19. （12 分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=AA_1=1$，$AC=\sqrt{3}$，点 D，E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.

（1）棱 AA_1 上是否存在点 P，使得平面 $PBD\perp$ 平面 ABE？若存在，求出 PA 的长，并证明你的结论；若不存在，请说明理由.

（2）求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.



20. （12 分）“硬科技”是以人工智能、航空航天、生物技术、光电芯片、信息技术、新材料、新能源、智能制造等为代表的高精尖科技，属于由科技创新构成的物理世界，是需要长期研发投入、持续积累才能形成的原创技术，具有极高技术门槛和技术壁垒，难以被复制和模仿.在华为的影响下，我国的一大批自主创新的企业都在打造自己的科技品牌，某高科技企业为确定下一年度投入某种产品的研发费用，需了解年研发费用 x（单位：千万元）对年销售量 y（单位：千万件）的影响，统计了近 10 年投入的年研发费用 x，与年销售量 y_i （$i=1,2,3,\cdots,10$）的数据，得到如图所示的散点图.



（1）利用散点图判断，$y=a+bx$ 和 $y=c+d\ln x$（其中 a，b，c，d 为大于 0 的常数）哪一个更适合作为年研发费用 x 和年销售量 y 的回归方程类型;（只要给出判断即可,不必说明理由）

（2）对数据作出如下处理：得到相关统计量的值如表：

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(w_i-\overline{w})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum_{i=1}^{10}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
9.4	29.7	2	366	5.5	439.2	55

其中令 $w_1=\ln x_i$，$\overline{w}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}w_i$.

根据（1）的判断结果及表中数据，求 y 关于 x 的回归方程，并预测投入的年研发费用 28 千万元时的年销售量;

（3）从这 10 年的数据中随机抽取 3 个，记年销售量超过 30（千万件）的个数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

参考数据和公式：$\ln 2\approx 0.69$，$\ln 7\approx 1.95$.对于一组数据 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，…，(u_n,v_n)，其回归直线 $\hat{v}=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\overline{u}\overline{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\overline{u}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}，\alpha=\overline{v}-\beta\overline{u}.$$

21. （12 分）已知中心为坐标原点的椭圆 C 的一个焦点为 $F\left(\sqrt{3},0\right)$，且经过点 $M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

（1）求椭圆 C 的标准方程.

（2）若不经过点 F 的直线 l：$y=kx+m\left(k<0,m>0\right)$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，试探究 $\triangle ABF$ 的周长是否为定值.若是，求出定值；若不是，请说明理由.

22. （12 分）已知函数 $f(x)=\ln x$.

（1）设函数 $t(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+2)x+2af(x)$，讨论 $t(x)$ 的单调性.

（2）函数 $g(x)=x^3\left(x>0\right)$ 的图象在点 P 处的切线为 l，是否存在这样的点 P 使得直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 也相切？若存在，判断满足条件的点 P 的个数；若不存在，请说明理由.

周练答案

1.C 2.A 3.B 4. A 5.D 6. B 7.D 8.B

9. BD 10. AB 11. ACD 12.AD

13. 60 14. $(\sqrt{5},0)$ 15. 32 16. $8\sqrt{6}\pi$, $\frac{14}{3}\pi$

17.

18. 解：（1）因为$a_3=256$，$a_{n+1}=3S_n+16$，

所以$a_3=3S_2+16=256$，

所以$S_2=80=a_1+a_2$，

又$a_2=3S_1+16=3a_1+16$，

解得$a_1=16$，$a_2=64$，（3 分）

当$n\geq 2$时，$a_n=3S_{n-1}+16$，与$a_{n+1}=3S_n+16$联立，

得$a_{n+1}-a_n=3a_n$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$，

又因为$\frac{a_2}{a_1}=4$，

所以$\{a_n\}$是等比数列，

所以$a_n=16\times 4^{n-1}=4^{n+1}$.（6 分）

（2）由（1）得$b_n=\frac{1}{\log_2 4^{n+1}}=\frac{1}{2n+2}$

$b_{n+2}=\frac{1}{\log_2 4^{n+3}}=\frac{1}{2n+6}$，（8 分）

所以$b_nb_{n+2}=\frac{1}{4(n+1)(n+3)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$，（10 分）

所以$T_n=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)<\frac{1}{8}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{48}$. （12 分）

19. 解：（1）存在点 P 满足题意，且 $PA=\frac{3}{4}$.

证明如下：如图，取 A_1C_1 的中点 F，连接 EF， AF， DF，

则 $EF//A_1B_1//AB$，$\therefore AF\subset$ 平面 ABE.

$\because AB=BC$， D 是 AC 的中点，$\therefore BD\perp AC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 A_1ACC_1，且交线为 AC，

$\therefore BD\perp$ 平面 A_1ACC_1，$\therefore BD\perp AF$.

在平面 A_1ACC_1 内，$\because \frac{AP}{AD}=\frac{AD}{DF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\angle PAD=\angle ADF=90^\circ$，

$\therefore Rt\triangle PAD\sim Rt\triangle ADF$，从而可得 $AF\perp PD$.

又 $\because PD\cap BD=D$，$\therefore AF\perp$ 平面 PBD.

$\because AF\subset$ 平面 ABE，$\therefore$ 平面 $PBD\perp$ 平面 ABE.

（2）如图，以 D 为坐标原点，以 DB， DC， DF 所在直线分别为 x， y， z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

易知 $D\left(0,0,0\right)$， $B\left(\frac{1}{2},0,0\right)$， $A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$， $E\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$， $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$， $\overrightarrow{DB}=\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，

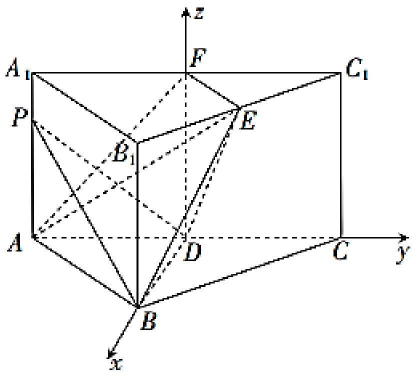
则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$，

取 $y=2$，得 $\vec{m}=\left(-2\sqrt{3},2,-\sqrt{3}\right)$，

同理可求得平面 BDE 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(0,4,-\sqrt{3}\right)$，

则 $\cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{8+3}{\sqrt{12+4+3}\times\sqrt{16+3}}=\dfrac{11}{19}$，

由图可知二面角 $A-BE-D$ 为锐角，∴其余弦值为 $\dfrac{11}{19}$.



20. 解：（1）由散点图知，选择回归类型，$y=c+d\ln x$ 更适合.（2 分）

（2）令 $w=\ln x$，先建立 y 关于 w 的线性回归方程.

由于 $d=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{10}(w_i-\overline{w})^2}=\dfrac{55}{5.5}=10$，

$\hat{c}=\overline{y}-d\overline{w}=29.7-10\times2=9.7$，

所以 y 关于 w 的线性回归方程为 $\overline{y}=9.7+10w$，

因此 y 关于 x 的回归方程为 $y=9.7+10\ln x$.（6 分）

当年研发费用 28 千万元，即 $x=28$ 时，

年销售量 y 的预报值 $y=9.7+10\ln28=9.7+10\times(2\ln2+\ln7)\approx43$（千万件）.（8 分）

（3）由散点图可知这 10 年的数据中，年销售量超过 30（千万件）的个数有 4 个，所以 X 的取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$ ；

$$P(X=1)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2};$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10};$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30},$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

（10 分）

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. （12 分）

21. 解:（1）设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，由题可知另一个焦点为 $F'\left(-\sqrt{3},0\right)$.

由椭圆的定义可知 $\left|MF\right|+\left|MF'\right|=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=4=2a$，

所以 $a=2$.

因为 $c=\sqrt{3}$ 且 $b^2=a^2-c^2$，所以 $b=1$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）因为直线 l： $y=kx+m\left(k<0,m>0\right)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，

所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即 $m^2=1+k^2$.

设 $A\left(x_1,y_1\right)$， $B\left(x_2,y_2\right)$，联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去 y 整理得

$\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，所以 $\Delta=16\left(4k^2-m^2+1\right)=48k^2>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$.

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1}\sqrt{3k^2+1-m^2}\,\dfrac{4\sqrt{k^2+1}}{4k^2+1}\sqrt{4k^2-m^2+1}$,

又$m^2=1+k^2$，所以$|AB|=\dfrac{-4\sqrt{3}km}{4k^2+1}$.

因为$|AF|=\sqrt{\left(x_1-\sqrt{3}\right)^2+y_1^2}=\sqrt{\left(x_1-\sqrt{3}\right)^2+1-\dfrac{x_1^2}{4}}=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1$，同理$|BF|=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2$,

所以$|AF|+|BF|=4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x_1+x_2\right)=4+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{8km}{4k^2+1}=4+\dfrac{4\sqrt{3}km}{4k^2+1}$,

所以$|AF|+|BF|+|AB|=4+\dfrac{4\sqrt{3}km}{4k^2+1}-\dfrac{4\sqrt{3}km}{4k^2+1}=4$,

故$\triangle ABF$的周长为定值 4.

22. 解：（1）因为$t(x)=\dfrac{1}{2}x^2-(a+2)x+2a\ln x$,

所以$t'(x)=x-(a+2)+\dfrac{2a}{x}=\dfrac{(x-2)(x-a)}{x}$.

所以①当$a\le 0$时，$t(x)$在$\left(0,2\right]$上为减函数，在$\left[2,+\infty\right)$为增函数；

②当$0<a<2$时，$t(x)$在$\left(0,a\right]$上为增函数，在$\left[a,2\right]$上为减函数，在$\left[2,+\infty\right)$上为增函数；

③当$a=2$时，$t(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数；

④当$a>2$时，$t(x)$在$\left(0,2\right]$上为增函数，在$\left[2,a\right]$上为减函数，在$\left[a,+\infty\right)$上为增函数.

（2）设$P\left(x_0,x_0^3\right)\left(x_0>0\right)$.

因为$g'(x)=3x^2$，所以$g'\left(x_0\right)=3x_0^2$,

所以直线l的方程为$y-x_0^3=3x_0^2\left(x-x_0\right)$，即$y=3x_0^2x-2x_0^3$①.

假设直线l与$f(x)$的图象也相切，切点为$\left(x_1,\ln x_1\right)$.

因为$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以$f'\left(x_1\right)=\dfrac{1}{x_1}$,

所以直线 l 的方程也可以写为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}\left(x-x_1\right)$.

又因为 $3x_0^2=\frac{1}{x_1}$，即 $x_1=\frac{1}{3x_0^2}$，

所以直线 l 的方程为 $y-\ln\frac{1}{3x_0^2}=3x_0^2\left(x-\frac{1}{3x_0^2}\right)$，即 $y=3x_0^2x-2\ln x_0-\ln 3-1$②.

由①②得 $-2\ln x_0-\ln 3-1=-2x_0^3$，即 $2x_0^3-2\ln x_0-1-\ln 3=0$.

令 $m\left(x_0\right)=2x_0^3-2\ln x_0-1-\ln 3=0\left(x_0>0\right)$，

所以 $m'\left(x_0\right)=6x_0^2-\frac{2}{x_0}$.

令 $m'\left(x_0\right)=6x_0^2-\frac{2}{x_0}\geq 0$，得 $x_0\geq\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$，

所以 $m\left(x_0\right)$ 在 $\left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right]$ 单调递减，在 $\left[\sqrt[3]{\frac{1}{3}},+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $m\left(x_0\right)_{\min}=m\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=2\times\frac{1}{3}-2\ln\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-1-\ln 3=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln 3<0$.

又因为当 $x\to 0$ 时，$m\left(x_0\right)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$m\left(x_0\right)\to+\infty$.

所以 $m\left(x_0\right)=2x_0^3-2\ln x_0-1-\ln 3=0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 有且只有两个实数根.

故存在这样的点 P 使得直线 l 与函数 $f(x)$ 的图象也相切，这样的点 P 有且只有两个.