徐州市2018~2019学年度高三年级考前模拟检测

数学Ⅰ

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共4页，包含填空题（共14题）、解答题（共6题），满分为160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将答题卡交回。

2. 答题前，请您务必将自己的姓名、考试证号等用书写黑色字迹的0.5毫米签字笔填写在答题卡上。

3. 作答试题必须用书写黑色字迹的0.5毫米签字笔写在答题卡上的指定位置，在其它位置作答一律无效。如有作图需要，可用2B铅笔作答，并请加黑、加粗，描写清楚。

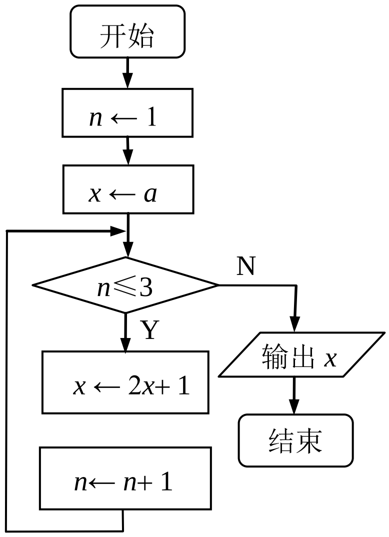
一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分．请把答案填写在答题卡相应位置．

1．集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x\,|-2<x<0\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数是__▲__．

2．已知i是虚数单位，复数 z 满足 $\dfrac{z-3\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，则复数 z 的实部为__▲__．

3．一组数据175，177，174，175，174的方差为__▲__．

4．某算法流程图如右图所示，该程序运行后，若输出的 $x=63$，则实数 a 的值为__▲__．



（第4题）

5．已知两个袋子中装有大小和形状相同的小球，其中甲袋中有3个小球编号为1，2，3，乙袋中有4个小球编号为1，2，3，4，若从两个袋中各取出1球，则取出的两个小球编号相同的概率为__▲__．

6．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 的左准线与 x 轴的交点为点 P，则点 P 到其中一条渐近线的距离为__▲__．

7．已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\dfrac{ax}{\mathrm{e}^x}$（其中e为自然对数的底数）为偶函数，则实数 a 的值为__▲__．

8．已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的两个单位向量，向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$， $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则实数 k 的值为___▲___.

9．已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，若实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)=0$，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为___▲___.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，若对 $\forall n\geqslant 2$， $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $T_{n+1}\cdot T_{n-1}=2T_n^{\ 2}$ 成立，且 $a_1=1,a_2=2$，则数列 $\{a_n\}$ 的前10 项和为___▲___.

11. 已知一个圆柱的轴截面为正方形，其侧面积为 S_1，与该圆柱等底等高的圆锥的侧面积为 S_2，则 $\dfrac{S_2}{S_1}$ 的值为___▲___.

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\leqslant 0,\\ f(x-1), & x>0,\end{cases}$ $g(x)=k(x+1)$，若方程 $f(x)-g(x)=0$ 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是___▲___.

13．已知 A，B 为圆 O： $x^2+y^2=5$ 上的两个动点， $AB=4$，M 为线段 AB 的中点，点 P 为直线 $l:x+y-6=0$ 上一动点，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为___▲___.

14．设实数 a， b， c，满足 $a+b=2c-1$， $a^2+b^2=c^2+2c-3$，则 ab 的取值范围是___▲___.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AC=3$， $\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$， $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）求 AB 的长；

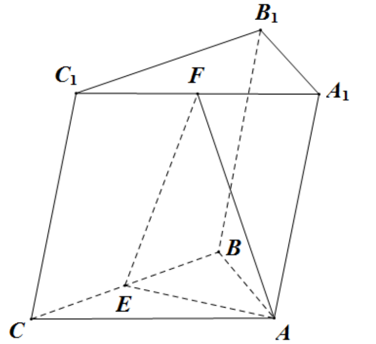
（2）求 $\cos(C-\dfrac{\pi}{6})$ 的值.

16．（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=AC$ ，侧面 $BCC_1B_1\perp$ 底面 ABC ， E,F 分别为棱 BC 和 A_1C_1 的中点.

（1）求证： EF // 平面 ABB_1A_1 ；

（2）求证：平面 $AEF\perp$ 平面 BCC_1B_1 .



（第 16 题）

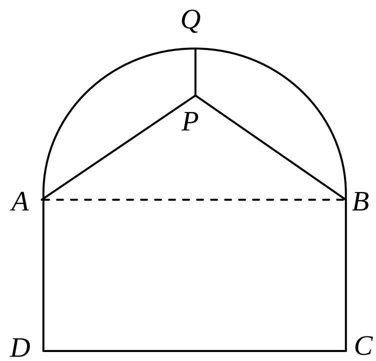
17．（本小题满分 14 分）

如图，某隧道的剖面图是由半圆及矩形 $ABCD$ 组成．交通部门拟在隧道顶部安装通风设备（视作点 P），为了固定该设备，计划除从隧道最高点 Q 处使用钢管垂直向下吊装以外，再在两侧自 A， B 两点分别使用钢管支撑．已知道路宽 $AB=8\,\text{m}$，设备要求安装在半圆内部，所使用的钢管总长度为 L .

（1） ①设 $PQ=x$ ，将 L 表示为关于 x 的函数；

②设 $\angle PAB=\theta$，将 L 表示为关于 θ 的函数；

（2）请选用（1）中的一个函数关系式，说明如何设计，所用的钢管材料最省？



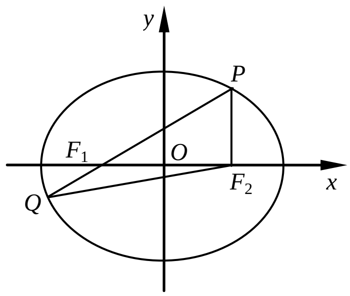
（第 17 题）

18．（本小题满分 16 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为椭圆 C 上一点，且 PF_2 垂直于 x 轴，连结 PF_1 并延长交椭圆于另一点 Q，设 $PQ=\lambda F_1Q$．

（1）若点 P 的坐标为$(2,3)$，求椭圆 C 的方程及 λ 的值；

（2）若$4\leqslant\lambda\leqslant5$，求椭圆 C 的离心率的取值范围．



（第 18 题）

19．（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+a\ln x$．

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 3，求实数 a 的值；

（2）若函数在区间$[1,2]$上存在极小值，求实数 a 的取值范围；

（3）如果 $f(x)<0$ 的解集中只有一个整数，求实数 a 的取值范围．

20．（本小题满分 16 分)

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=0$，且对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，a_{2k-1},a_{2k},a_{2k+1}成等差数列，其公差为 d_k．

（1）若 $d_1=2$，求 a_2,a_3 的值；

（2）若 $d_k=2k$，证明 a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+2} 成等比数列（$k\in\mathbf{N}^*$）；

（3）若对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+2} 成等比数列，其公比为 q_k．设 $q_1\neq1$，证明数列 $\left\{\dfrac{1}{q_k-1}\right\}$ 是等差数列．

徐州市2018~2019学年度高三年级考前模拟检测

数学Ⅰ 参考答案与评分标准

一、填空题：

1．1　2．-4　3．$\dfrac{6}{5}$　4．7　5．$\dfrac{1}{4}$　6．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　7．1　8．$\dfrac{5}{4}$

9．$\dfrac{\pi}{6}$　10．1023　11．$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　12．$[-\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{2e}]$　13．7　14．$[\dfrac{11}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{11}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}]$

二、解答题：

15．（1）在$\triangle ABC$中，因为$\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，所以$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，…………2分

又因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin(B+\dfrac{\pi}{3})=\sin B\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos B\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

…………4分

由正弦定理得，$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，所以$AB=\dfrac{AC}{\sin B}\cdot\sin C=2$．…………7分

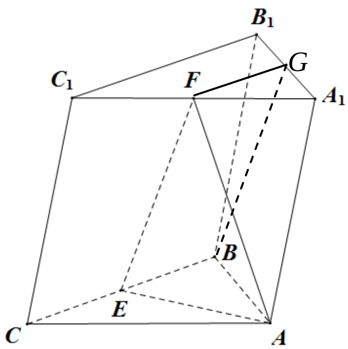
（2）因为$A+B+C=\pi$，

所以$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\cos(B+\dfrac{\pi}{3})$

$=\sin B\sin\dfrac{\pi}{3}-\cos B\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，…………10分

所以$\cos(C-\dfrac{\pi}{6})=\cos C\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin C\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$．…………14分

16．（1）取A_1B_1的中点G，连接BG，FG，



在$\triangle A_1B_1C_1$中，因为F,G分别为A_1C_1,A_1B_1的中点，

所以$FG\,//\,B_1C_1$，且$FG=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，

在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BC\,//\,B_1C_1$，

又E为棱BC的中点，

所以$FG\,//\,BE$且$FG=BE$，

从而四边形$BEFG$为平行四边形，…………4分

于是 $EF \parallel BG$，

又因为 $BG \subset$ 面 ABB_1A_1， $EF \not\subset$ 面 ABB_1A_1，

所以 $EF \parallel$ 平面 ABB_1A_1；……………………7 分

（2）证明：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB = AC$， E 为 BC 的中点，

所以 $AE \perp BC$，

又因为侧面 $BCC_1B_1 \perp$ 底面 ABC，侧面 $BCC_1B_1 \cap$ 底面 $ABC=BC$，且 $AE \subset$ 面 ABC，

所以 $AE \perp$ 平面 BCC_1B_1， ………………………………………………………12 分

又 $AE \subset$ 面 AEF，

所以平面 $AEF \perp$ 平面 BCC_1B_1． ………………………………………………………14 分

17．（1）延长 QP 交 AB 于点 E，则 $QE \perp AB$ ，且 E 为 AB 的中点，

所以 $EA=EB=EQ=\dfrac{1}{2}AB=4$，由对称性可知，$PA=PB$.

①若 $PQ = x$，则 $0 < x < 4$， $EP = 4 - x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAE$ 中， $PA = \sqrt{PE^2 + AE^2} = \sqrt{(4-x)^2 + 16}$，

所以 $L=PQ+2PA = x + 2\sqrt{(4-x)^2+16}$ （$0 < x < 4$）， ……………………3 分

②若 $\angle PAB = \theta$，则 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ ，

在 $Rt\triangle PAE$ 中， $PA = \dfrac{AE}{\cos\theta} = \dfrac{4}{\cos\theta}, PE = AE\tan\theta = 4\tan\theta$，

所以 $PQ = QE - PE = 4 - 4\tan\theta$，

所以 $L=PQ+2PA = 4 - 4\tan\theta + 2\times\dfrac{4}{\cos\theta} = 4 + 4\times\dfrac{2-\sin\theta}{\cos\theta}$ （$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$）． ……6 分

（2）选取②中的函数关系式，$L=4+4\times\dfrac{2-\sin\theta}{\cos\theta}$ （$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$），

记 $f(\theta) = \dfrac{2-\sin\theta}{\cos\theta}$ （$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$），

则由 $f'(\theta) = \dfrac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta} = 0$ 及 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ 可得， $\theta=\dfrac{\pi}{6}$， ……………………………10 分

当 $\theta \in (0, \dfrac{\pi}{6})$ 时 $f'(\theta) < 0$，此时 $f(\theta)$ 单调递减，

当 $\theta \in (\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4})$ 时 $f'(\theta) > 0$，此时 $f(\theta)$ 单调递增，

所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时， $f(\theta)$ 取得最小值，

从而钢管总长度为 L 取得最小值，即所用的钢管材料最省． ……………………14 分

18．（1）因为 PF_2 垂直于 x 轴，且点 P 的坐标为 $(2,3)$，

所以 $a^2-b^2=c^2=4$，$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$， ……………………………………………2 分

解得 $a^2=16$，$b^2=12$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$． …………………… 4 分

所以 $F_1(-2,0)$，直线 PF_1 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x+2)$，

将 $y=\frac{3}{4}(x+2)$ 代入椭圆 C 的方程，解得 $x_Q=-\frac{26}{7}$， …………………………… 6 分

所以 $\lambda=\frac{PQ}{F_1Q}=\frac{x_P-x_Q}{x_{F_1}-x_Q}=\frac{2+\frac{26}{7}}{-2+\frac{26}{7}}=\frac{10}{3}$． ……………………………………………… 8 分

（2）因为 $PF_2\perp x$ 轴，不妨设 P 在 x 轴上方，$P(c，y_0)$，$y_0>0$．设 $Q(x_1，y_1)$．

因为 P 在椭圆上，所以$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，解得 $y_0=\frac{b^2}{a}$，即 $P(c，\frac{b^2}{a})$． ……………10 分

（方法一）因为 $F_1(-c，0)$，由 $PQ=\lambda F_1Q$ 得，$c-x_1=\lambda(-c-x_1)$，$\frac{b^2}{a}-y_1=-\lambda y_1$

解得 $x_1=-\frac{\lambda+1}{\lambda-1}c$，$y_1=-\frac{b^2}{(\lambda-1)a}$，所以 $Q(-\frac{\lambda+1}{\lambda-1}c，-\frac{b^2}{(\lambda-1)a})$． ………………12 分

因为点 Q 在椭圆上，所以$(\frac{\lambda+1}{\lambda-1})^2e^2+\frac{b^2}{(\lambda-1)^2a^2}=1$，即$(\lambda+1)^2e^2+(1-e^2)=(\lambda-1)^2$，

所以$(\lambda+2)e^2=\lambda-2$，从而 $e^2=\frac{\lambda-2}{\lambda+2}$． ……………………………………………14 分

因为 $4\leqslant\lambda\leqslant5$，所以 $\frac{1}{3}\leqslant e^2\leqslant\frac{3}{7}$．解得 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant e\leqslant\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以椭圆 C 的离心率的取值范围 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{21}}{7}\right]$． ………………………………… 16 分

（法二）因为 $F_1(-c，0)$，故直线 PF_1 的方程为 $y=\frac{b^2}{2ac}(x+c)$． ………………10 分

由 $\begin{cases} y=\frac{b^2}{2ac}(x+c), \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 得$(4c^2+b^2)x^2+2b^2cx+c^2(b^2-4a^2)=0$．

因为直线 PF_1 与椭圆有一个交点为 $P(c，\frac{b^2}{a})$．则 $x_1+c=-\frac{2b^2c}{4c^2+b^2}$， ……… 12 分

因为 $PQ=\lambda F_1Q$，

所以$\lambda=\dfrac{c-x_1}{-c-x_1}=1-\dfrac{2c}{c+x_1}=1+2c\times\dfrac{4c^2+b^2}{2b^2c}=-2+\dfrac{4}{1-e^2}$， ………………… 14 分

因为 4⩽λ⩽5，所以$\dfrac{1}{3}\leqslant e^2\leqslant\dfrac{3}{7}$，解得$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant e\leqslant\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以椭圆 C 的离心率的取值范围$[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{21}}{7}]$. ………………………………16 分

19．（1）由题意，$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2+ax+1}{x^2}$，

由题意知，$f(1)=3$，所以 $2+a=3$，解得 $a=1$. ………………………………2 分

（2）令 $f'(x)=0$，所以 $x^2+ax+1=0$，所以 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$（舍负），………4 分

因为函数在$[1,2]$上存在极小值，所以$1<\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}<2$，

解之得$-\dfrac{5}{2}<a<-2$，………………………………………………………6 分

经检验，当$-\dfrac{5}{2}<a<-2$时，符合题意，

所以$-\dfrac{5}{2}<a<-2$.………………………………………………………8 分

（3）①当 $a^2-4\le 0$，即 $a\in[-2,2]$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，Q $f(1)=0$

所以当 $0<x<1$时，$f(x)<0$，所以当 $x>1$时，$f(x)>0$，所以不存在；………10 分

②当 $a^2-4>0$，即 $a<-2$或$a>2$ 时，

若$\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\le 1$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，此时不符合题意，

若$\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}>1$，即 $a<-2$ 时，记 $x_0=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

可得 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为减函数，$(x_0,+\infty)$ 上为增函数，…………………………12 分

因为 $f(x)<0$ 的解集中只有一个整数解，

故$\begin{cases} f(2)<0 \\ f(3)\geq 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} 2-\dfrac{1}{2}+a\ln 2<0 \\ 3-\dfrac{1}{3}+a\ln 3\geq 0 \end{cases}$，……………………………………………………14 分

解得$-\dfrac{8}{3\ln 3}\leq a<-\dfrac{3}{2\ln 2}$，

综上，$a\in\left[-\dfrac{8}{3\ln 3},-\dfrac{3}{2\ln 2}\right)$. ……………………………………………………16 分

20.（1）因为对任意$k\in\mathbf{N}^*$，a_{2k-1},a_{2k},a_{2k+1}成等差数列，

所以当$k=1$时，a_1,a_2,a_3成等差数列，且公差为$d_1=2$.

由$a_1=0$可知，$a_2=2$，$a_3=4$. ……………………………………………2 分

（2）证明：由题设，可得$a_{2k+1}-a_{2k-1}=4k$，$k\in\mathbf{N}^*$. 所以

$a_{2k+1}-a_1=(a_{2k+1}-a_{2k-1})+(a_{2k-1}-a_{2k-3})+\cdots+(a_3-a_1)=4k+4(k-1)+\cdots+4\times 1$，

由$a_1=0$得，$a_{2k+1}=2k(k+1)$，……………………………………………………6 分

从而$a_{2k}=a_{2k+1}-2k=2k^2$，所以$a_{2k+2}=2(k+1)^2$. ……………………………………8 分

于是$\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\dfrac{k+1}{k}$，

所以当$d_k=2k$时，对任意的$k\in\mathbf{N}^*$，a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+2}成等比数列. ………………10 分

（3）证法一：由a_{2k-1},a_{2k},a_{2k+1}成等差数列，及a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+2}成等比数列，

可得$2a_{2k}=a_{2k-1}+a_{2k+1}$，所以$2=\dfrac{a_{2k-1}}{a_{2k}}+\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\dfrac{1}{q_{k-1}}+q_k$，…………………………12 分

当$q_1\neq 1$时，可知$q_k\neq 1$，$k\in\mathbf{N}^*$，

从而$\dfrac{1}{q_k-1}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{q_{k-1}}-1}=\dfrac{1}{q_{k-1}-1}+1$，即$\dfrac{1}{q_k-1}-\dfrac{1}{q_{k-1}-1}=1(k\geqslant 2)$，

所以数列$\{\dfrac{1}{q_k-1}\}$ 是公差为 1 的等差数列. ………………………………………16 分

证法二：由题设，可得$d_k=a_{2k+1}-a_{2k}=q_ka_{2k}-a_{2k}=a_{2k}(q_k-1)$, ……………12 分

$d_{k+1}=a_{2k+2}-a_{2k+1}=q_k{}^2a_{2k}-q_ka_{2k}=a_{2k}q_k(q_k-1)$, 所以$d_{k+1}=q_kd_k$

$$q_{k+1}=\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+2}}=\frac{a_{2k+2}+d_{k+1}}{a_{2k+2}}=1+\frac{d_{k+1}}{q_k^2a_{2k}}=1+\frac{d_k}{q_ka_{2k}}=1+\frac{q_k-1}{q_k}$$

由$q_1\neq1$可知$q_k\neq1,k\in N^*$。可得$\dfrac{1}{q_{k+1}-1}-\dfrac{1}{q_k-1}=\dfrac{q_k}{q_k-1}-\dfrac{1}{q_k-1}=1$,

所以$\left\{\dfrac{1}{q_k-1}\right\}$是等差数列，公差为 1. ………………………………………………16 分

徐州市2018~2019学年度高三年级考前模拟检测

数学Ⅱ（附加题）参考答案与评分标准

21A． 因为向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3\\0&b\end{bmatrix}$的属于特征值$-2$的一个特征向量，

所以$\begin{bmatrix}1&3\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix}1+3a\\ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2a\end{bmatrix}$，

则$\begin{cases}1+3a=-2\\ab=-2a\end{cases}$，即$\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\end{cases}$

所以矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3\\0&-2\end{bmatrix}$. ……………………………………………………………5分

又因为$1\times(-2)-3\times0=-2\neq0$，

所以$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. ………………………………………………………………10分

B． 由曲线C的极坐标方程$\rho\sin^2\theta=2\cos\theta$，得$\rho^2\sin^2\theta=2\rho\cos\theta$，

所以曲线C的直角坐标方程是$y^2=2x$. ……………………………………………2分

所以直线l的普通方程为$x-y-4=0$. ……………………………………………4分

由$\begin{cases}x-y-4=0\\y^2=2x\end{cases}$ 解得$A(2,-2),B(8,4)$，

所以

$AB=\sqrt{(8-2)^2+(4-(-2))^2}=6\sqrt{2}$. ……………………………………………………10分

C． 因为$a,b,c>0$，$a+b+c=1$，所以$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

$$=\frac{1-b-c}{b+c}+\frac{1-c-a}{c+a}+\frac{1-a-b}{a+b}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}-3$$ …………… 3分

由$2=2(a+b+c)=[(a+b)+(b+c)+(c+a)]$， ……………………………………5分

由柯西不等式，得$[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\cdot(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})$

$\geqslant(\sqrt{b+c}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{c+a}\cdot\frac{1}{\sqrt{c+a}}+\sqrt{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+b}})^2=9$， ……………………………8 分

所以 $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}$，即 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$． ………………10 分

22．（1） $p=1-\frac{A_4^4}{C_5^2A_4^4}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$； ……………………………………………………………4 分

（2） $\xi=0,1,2,3,4,5$

$P(\xi=0)=\frac{3^5}{4^5}=\left(\frac{3}{4}\right)^5$， $P(\xi=1)=\frac{C_5^1\cdot3^4}{4^5}=\frac{5\cdot3^4}{4^5}$， $P(\xi=2)=\frac{C_5^2\cdot3^3}{4^5}=\frac{10\cdot3^3}{4^5}$，

$P(\xi=3)=\frac{C_5^3\cdot3^2}{4^5}=\frac{10\cdot3^2}{4^5}$， $P(\xi=4)=\frac{C_5^4\cdot3^1}{4^5}=\frac{15}{4^5}$， $P(\xi=5)=\frac{C_5^5\cdot3^0}{4^5}=\frac{1}{4^5}$，

所以 $E(\xi)=\sum_{i=0}^{5}i\cdot P_i=\frac{5}{4}$． ………………………………………………………10 分

23．（1）方法一：先证当 $n\geq2$ 时， $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，然后求和即可；

方法二：构造 $(1+x)^n$ 的展开式，然后两边求导，然后赋值 $x=1$ 即可；

方法三：倒序相加法；……………………………………………………………4 分

（2）先证当 $n\geq2$ 时， $\frac{1}{k}C_n^k=\frac{1}{k}\left(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}\right)=\frac{1}{k}\left(C_{n-1}^k+\frac{k}{n}C_n^k\right)=\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}C_n^k$

记 $f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k$，所以，当 $n\geq2$ 时，

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\left((-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k+(-1)^{k+1}\frac{1}{n}C_n^k\right)+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}C_n^k+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$=f_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k,$$

又 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k=-(1-1)^n+1=1$，所以 $f_n=f_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k=f_{n-1}+\frac{1}{n}$，

所以 $f_n-f_{n-1}=\frac{1}{n}$，又 $f_1=1$，

所以 $f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$． ……………………………………………10 分