

教 学
参 考

由一道教材习题命制高考模拟试题 的过程及心路历程

安徽省砀山中学 辛 民 (邮编:235300)

摘 要 记述了由一道教材习题演变成高考模拟试题的命制过程、试题的评析以及命题的思考与启示.

关键词 教材习题;演变;模拟试题

2020年皖北协作区高三联考要求命制一套数学模拟试题,命题组对本次试题压轴题的命制过程比较欣赏,试题考试的结果达到了预期的目的,现将其命制的过程、试题评析、思考启示与同行交流.

1 命制试题要求

命题组接到任务后,认真研究近三年全国高考数学试题、《普通高中数学课程标准》(2017年版)、《中国高考评价体系》,体会高中学业质量标准 and 课程内容,经讨论形成以下认识:

(1) 试题情境 压轴题属于综合题,力求创设课程学习情境和探索创新情境,以基本的初等函数为考查的重点,争取以教材中例题习题为原型进行改编,使试题源于教材,高于教材.

(2) 必备知识 考查函数导数的应用,以函数为载体考查导数公式,利用函数的导数研究函数的性质,如:单调性、极值、最值、零点等.

(3) 关键能力 考查学生逻辑思维能力和运算求解能力,试题选取学生熟悉的基本初等函数为出发点,考查利用函数的导数讨论判断函数单调性的方法、函数最值的概念以及导数公式及导数运算法则,考查学生灵活运用导数工具分析问题和解决问题的能力,综合考查学生的逻辑思维能力、运算求解能力以及分类讨论的思想.

(4) 学科素养 考查理性思维和数学探索.通过选取适合的条件、恰当的设问,要求学生能够通过条件与结论的分析,探索论证的思路,选取合适的论证方法予以证明,并能用准确的数学语言表述论证的过程.

2 试题

已知函数 $f(x) = ax^2 - 2\ln x (a \in \mathbf{R})$

(1) 当 $a = 1$, 证明: $f(x) \geq x - \ln x$;

(2) 是否存在不等的正实数 m, n 满足 $m = n^2$ 且 $f(m) = f(n)$, 若存在, 求 a 的取值范围, 否则说明理由.

3 命题过程

根据命题要求, 命题组成员分头查阅资料、检索文献、搜集素材, 最后目标集中到教材中复习题: 已知函数 $f(x) = x - \ln x$, 求函数的单调区间和极值点. (北师大版本选修2——2复习题三A组第一题第2题), 大家认为此题以常见的对数函数和多项式函数线性组合为试题情境, 形式简洁, 但是作为模拟题与高考要求有差距、解答过于简单, 高考试题求导后一般研究的是二次函数, 而本题解答为一次函数且缺少新意, 不符合试题命制的要求, 故需改造. 研究讨论增加多项式的次数, 引入参数得函数 $f(x) = ax^2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$, 以下研究此函数性质以便设计试题:

由 $f(x) = ax^2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$ 知: $x > 0$,

$$f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x},$$

所以当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是减函数, 有唯一的零点,

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得: $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$ 内是减函数, 在 $(\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$ 内是增函数,

$$f(x) \text{ 的极小值为 } f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2a.$$

显然, 当 $2a > \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 无零点, $2a = \frac{1}{e}$ 时, 函数有唯一的零点, $0 < 2a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

到此命制试题第一问:

已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$

若 $a \geq 1$, 证明 $f(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$.

第二问若继续围绕给定的函数设计问题, 落于俗套、无新意, 经研究讨论, 改为如下探索性问题:

是否存在不等正实数 m, n 满足 $mn = 1$ 且 $f(m) = f(n)$, 若存在, 求 a 的取值范围; 否则说明理由.

分析及思考 假设存在不等的正数 m, n 满足 $mn = 1$ 且 $f(m) = f(n)$,

不妨设 $0 < m < 1$, 由 $mn = 1$ 及 $f(n) = f(m)$ 得: $am^2 - \ln m = an^2 - \ln n$,

$$\text{所以 } am^2 - \ln m = \frac{a}{m^2} + \ln m,$$

$$\text{即 } am^4 - 2m^2 \ln m - a = 0,$$

问题转化为关于 x 的方程 $ax^2 - x \ln x - a = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有零点.

$$\text{令 } h(x) = ax^2 - x \ln x - a,$$

当 $a \leq 0$ 时, 若 $x \in (0, 1)$, $h(x) = ax^2 - x \ln x - a > 0$, 所以当 $a \leq 0$ 时, $h(x) = ax^2 - x \ln x - a$ 在 $(0, 1)$ 内没有零点,

当 $a > 0$ 时, $h'(x) = 2ax - \ln x - 1$, $h''(x) = 2a - \frac{1}{x} = 0$, 得 $x = \frac{1}{2a}$,

所以 $x \in (0, \frac{1}{2a})$, $h''(x) < 0$, $h'(x)$ 是减函数, 当 $x \in (\frac{1}{2a}, +\infty)$ 时, $h''(x) > 0$, $h'(x)$ 是增函数.

所以函数 $h'(x)$ 的最小值为 $h'\left(\frac{1}{2a}\right) = \ln 2a$,

若 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 令 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$

内是增函数, 且 $h(1) = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内没有零点.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{2a} > 1$, 所以 $h'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内是减函数, $h'(1) = 2a - 1 < 0$.

由此 $h'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2a}{e} - \ln \frac{1}{e} - 1 = \frac{2a}{e} > 0$, 所以 $h'(x) = 2ax - \ln x - 1$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 内存在零点 x_0 .

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数, 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数. 所以 $h(x_0) > h(1) = 0$.

故当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) = ax^2 - x \ln x - a \rightarrow -a$. 或当 $a > \frac{1}{e^k}$, $k \in \mathbf{N}^*$, $h\left(\frac{1}{e^k}\right) = \frac{a}{e^{2k}} + \frac{4k}{e^{4k}} - a < a\left(\frac{1}{e^{2k}} + \frac{4k}{e^{4k}} - 1\right) < a\left(\frac{1}{e^{2k}} + \frac{4}{e^{2k}} - 1\right) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内存在零点.

综上所述, a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2})$.

命题组认为此题较好地体现了命题意图, 特别是由关于 m 的方程 $am^4 - 2m^2 \ln m - a = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有解转化为关于 x 的方程 $ax^2 - x \ln x - a = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有零点, 简化了函数解析式, 进而利用导函数及单调性讨论函数的零点, 较好地体现了数学核心素养水平划分的要求: 能够在综合的情境中抽象出数学问题, 并用恰当的数学语言予以表达; 能够在得到的数学结论基础上形成新命题; 能够针对具体的问题运用或创造数学方法解决问题(数学抽象水平三). 在综合的情境中, 能够把问题转化为运算问题, 确定运算对象和运算法则, 明确运算方向. 能够对运算问题, 构造运算程序, 解决问题(数学运算水平三), 由解题的过程知, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $h(x) = ax^2 - x \ln x - a \rightarrow -a$, 或者进行估值判断 $h\left(\frac{1}{e^{4k}}\right)$ 的值, 超出了高中生的认知水平, 命题组认为此题应继续打磨降低难度, 随即调整正实数 m, n 满足条件, 第二问改为下面的问题.

是否存在不等的正实数 m, n 满足 $m = n^2$ 且 $f(m) = f(n)$, 若存在, 求 a 的取值范围, 否则说明理由.

分析思考 由题设 $m = n^2$ 及 $f(n) = f(m)$

得: $am^2 - \ln m = am - \frac{1}{2} \ln m$,

$$\text{即 } am^2 - am - \frac{1}{2} \ln m = 0,$$

问题转化为关于 m 的方程 $am^2 - am - \frac{1}{2} \ln m = 0$ 有不等于 1 的实根.

至此,命题组认为 $am^2 - am - \frac{1}{2} \ln m = 0$ 中的 $\frac{1}{2}$ 不协调,不自然,有必要调整.

经商议试题改为以下形式:

已知函数 $f(x) = ax^2 - 2\ln x (a \in \mathbf{R})$

(1) 若 $a \geq 1$, 证明: $f(x) \geq 1$;

(2) 是否存在不等的正实数 m, n 满足 $m = n^2$ 且 $f(m) = f(n)$, 若存在, 求 a 的取值范围, 否则说明理由.

解答 (1) 由 $f(x) = ax^2 - 2\ln x (a \in \mathbf{R})$ 知: $x > 0$, $f'(x) = 2ax - \frac{2}{x} = \frac{2ax^2 - 2}{x}$.

当 $a \geq 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得: $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{a}})$ 内是减函数, 在 $(\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty)$ 内是增函数,

$f(x)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{\sqrt{a}}) = 1 - 2\ln \frac{1}{\sqrt{a}} = 1 + \ln a \geq 1$, 所以当 $a \geq 1$ 时, $f(x) \geq 1$.

(2) 由题设 $m = n^2$ 及 $f(n) = f(m)$ 得: $am^2 - 2\ln m = am - \ln m$, 即 $am^2 - am - \ln m = 0$,

问题转化为关于 x 的方程 $ax^2 - ax - \ln x = 0$ 有不等于 1 的正实根.

令 $h(x) = ax^2 - ax - \ln x$,

当 $a \leq 0$ 时, 若 $x \in (0, 1)$, $h(x) = ax(x-1) - \ln x > 0$; 若 $x \in (1, +\infty)$, $h(x) = ax(x-1) - \ln x < 0$. 所以当 $a \leq 0$ 时, 方程没有不等于 1 的实根.

当 $a > 0$ 时, $h'(x) = 2ax - a - \frac{1}{x} = 0$, $x_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8a}}{4a}$; 易知当 $a > 1$ 时, $x_0 < 1$, 所以当 x

$\in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数.

所以 $h(x_0) < h(1) = 0$, $h(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a} - 1 + \ln a$, 令 $F(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$, 则 $F'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $F(x)$ 是减函数, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F(x)$ 是增函数.

由此 $h(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a} - 1 + \ln a > F(1) = 0$.

所以 $h(x) = ax^2 - ax - \ln x$ 在 $(\frac{1}{a}, x_0)$ 内存在零点.

当 $0 < a < 1$ 时, $x_0 > 1$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数.

所以 $h(x_0) < h(1) = 0$.

同理可证: $h(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a} - 1 + \ln a > 0$, 所以 $h(x) = ax^2 - ax - \ln x$ 在 $(x_0, \frac{1}{a})$ 内存在零点.

当 $a = 1$ 时, $x = 1$ 是函数 $h(x) = x^2 - x - \ln x$ 唯一的零点.

综上所述, a 的取值范围是 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

经年轻教师试做, 认为试题第一问与第二问没有联系, 设问不协调, 仍需要改进, 争取做到第一问的结果是第二问的求解铺垫, 或者对第二问问题解决有启发, 增加第一、二问的连贯性作为改进的方向. 命题组目光集中到: 当 $a = 1$ 时, $x = 1$ 是函数 $h(x) = x^2 - x - \ln x$ 唯一的零点上, 经研究第一问设问如下

已知函数 $f(x) = ax^2 - 2\ln x (a \in \mathbf{R})$

(1) 当 $a = 1$, 证明: $f(x) \geq x - \ln x$;

解 当 $a = 1$, 要证 $f(x) \geq x - \ln x$ 即 $x^2 - 2\ln x \geq x - \ln x$,

令 $p(x) = x^2 - x - \ln x$, 则 $p'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$,

由 $g'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 或 $x = -\frac{1}{2}$, 因此

当 $x \in (0, 1)$ 时, $p(x)$ 是减函数, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $p(x)$ 是增函数.

所以 $p(x) \geq p(1) = 0$, 故原不等式成立.

4 试题评析

以教材中的习题为母题,通过包装转化创新以二次函数与对数函数线性组合为载体,自然、合理,属于课程学习型、探索创新情境.第(1)问以函数与不等式组合设计问题,令 $a=1$,形式虽是不等式的证明,实质上仍是函数与导函数的关系,通过函数的极值证明不等式成立,此问的设计面向大部分学生,只要学生能够准确应用导数公式和求导法则进行导数运算,就可以解决问题.第(2)问设计成开放性、探究性问题,不是让学生研究给出的函数的问题,而是打破常规,让学生在理解题意的基础上,利用转化思想,将是否存在不等正数 m, n 使等式成立,转化为新的函数零点问题,事实上,就是研究函数 $y = \ln x$ 与 $y = ax^2 - ax$ 随着 a 的变化两图象交点,数形结合很容易看出函数的变化规律,关键是给出严谨的数学说理.考查由浅入深,逐步递进,层次分明,重点突出,对计算的难度、思维深度的要求逐步提高,很好的达到了考查的目的,试题从多角度考查了导数的基础知识,利用导数研究函数性质的方法以及导数的基础知识和解题方法,考查了函数的概念和单调性、介值性、零点等必备知识,同时对学生的逻辑推理能力、直觉思维能力、运算求解能力、分析与归纳能力,以及问题转化的数学思想方法提出了较高的要求,区分度较高,不同程度的学生理性思维的广度和深度得到了充分展示,可以较好地考查学生的进一步学习的潜能,为学生解题提供较大的想象空间,对学生灵活应用所学知识发现问题、分析问题、解决问题能力,寻找合理的解题策略以及推理论证能力有较高的要求,具有选拔功能.

第(1)问学生利用函数的导数单调性求函数的最值进而求解,学生答题较好,满分4分,平均得分3.06分.第(2)问的解答需要学生正确分析数学对象与情境之间的关系,通过理解、归纳、抽象、概括情境本质,合理选择运算方法,设计运算程序,探索论证思路,选择合适的论证方法予以证明,并能准确用严谨的数学语言表述论证过程.暴露出学生答题问题较多,如:①求导等计算错误,②问题转化能力薄弱,③不能正确的对函数值进行正确的估值,如 $\frac{a + \sqrt{a^2 + 8a}}{4a}, h\left(\frac{1}{a}\right)$ 的

大小,④学生解题过程中直觉思维能力有待提升,如不能找到介值的区间端点 $x_0, \frac{1}{a}$ 等,得分较低,平均1.03分.

5 命题启示

命制模拟试题以《普通高中数学课程标准》、《中国高考评价体系》为指导,科学确定必备知识、关键能力、学科素养等考查目标,全面体现考查基础性、综合性、应用性和创新性,站在学科整体高度创设数学概念建构、数学知识习得、数学运算演练、数学推理学习、数学分析、数学探索、数学实验等数学课程学习情景、探索创新情境,考查学生在复杂情境中必备知识的掌握程度.以恰当方式的设问、将解决数学问题所需要的知识、方法、技能和素养隐含试题之中,尽量以数学教材例习题为基础,创新试题载体,以数学中核心概念、性质、法则、定理、定义、公式为背景,自然合理,引导学生重视必备知识的学习.在问题的设问上要贴近学生的认识水平,让学生有似曾相识的感觉,克服畏惧心理,具有层次性,让不同的学生都有发挥的空间.当然,数学试题的命制,不可能一蹴而就,要经过反复认真打磨,多人试做,检验检测效果,提出修正意见,多个回合,最后形成模拟题.命制数学模拟试题不是为了难倒学生,而是为了检测复习的学习效果,改进教学,因此一定要心系学生,立足学生实际,重视学生心声,精细打磨,控制难度,难要合情合理,新要不奇不怪.经常命制试题有助于教师准确把握课程标准、课程内容、学业质量要求,有助于教师理解数学基础知识、掌握基本技能、感悟数学基本思想、积累数学基本活动经验,提升自身数学素养,同时在命题中表现出的用数学的眼光观察客观世界、用数学思维思考事物、用数学的语言表述事物的思维品质将传递给学生,并影响学生的终身发展.

参考文献

- 1 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018
- 2 普通高中课程标准实验教科书 数学(选修2-2)[M].北京:北京师范大学出版社,2018

(收稿日期:2020-06-26)